

Exercice 1 (Différences finies pour l'équation de Poisson 1D)

On considère le problème aux limites suivant :

$$\begin{cases} -u''(x) = f(x), & x \in \Omega =]0, 1] \\ u(0) = u_g, & u'(1) = 0 \end{cases} \quad (1)$$

1. Ecriture du schéma différences finies :

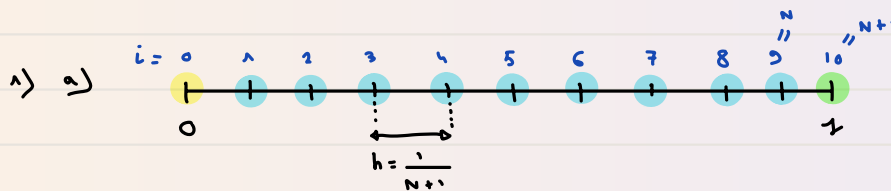
(a) Ecrire le schéma obtenu par la méthode des différences finies pour ce problème en utilisant une subdivision uniforme ($x_0 = 0, x_1, \dots, x_{N+1} = 1$) de $(N+2)$ points de l'intervalle $[0, 1]$, de pas $h = \frac{1}{N+1}$ et les formules d'approximation suivantes pour les dérivées :

$$u''(x) \simeq \frac{u(x-h) - 2u(x) + u(x+h)}{h^2} \quad (2)$$

pour la dérivée seconde en $x_i, i = 1, \dots, N+1$ et

$$u'(x) \simeq \frac{u(x+h) - u(x-h)}{2h} \quad (3)$$

pour la dérivée première en $x_{N+1} = 1$.



- EDP intérieure (u inconnue)
- Dirichlet (u connue)
- Neumann (u inconnue)

● Pour $i \in \llbracket 2; N \rrbracket$ (mailles intérieures):

$$f(x_i) = -u''(x_i) \stackrel{(2)}{\approx} -\frac{1}{h^2} (u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}) \quad (8)$$

Le vecteur inconnu est donc

$$u_h = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{N+1} \end{bmatrix}$$

● Pour $i = 1$ (⚠ $i-1 = 0$): on utilise la condition de Dirichlet en $x_0 = 0$.

$$f(x_1) = -u''(x_1) \stackrel{(2)}{\approx} -\frac{1}{h^2} (u_0 - 2u_1 + u_2) \quad (9)$$

● Pour $i = N+1$ (⚠ $i+1 = N+2 \dots$): on utilise la condition de Neumann

En $x_{N+1} = 1$, on a la condition de Neumann homogène:

$$0 = u'(x_{N+1}) \stackrel{(3)}{\approx} \frac{1}{2h} (\underbrace{u_{N+2}} - u_N)$$

↳ Valeur de u au point fantôme $x_{N+2} = 1+h$

On isole u_{N+2} : $\underline{u_{N+2} = u_N}$

On injecte dans le schéma:

$$f(x_{N+1}) = -u''(x_{N+1}) \approx -\frac{1}{h^2} [u_N - 2u_{N+1} + u_N]$$

$$= -\frac{1}{h^2} [2u_N - 2u_{N+1}] \quad (10)$$

En unifiant (8)-(9)-(10), on déduit le système linéaire $s_y u_h$:

$$A_h u_h = b_h, \quad \text{où}$$

Matrice $(n+1) \times (n+1)$ Vecteurs $(n+1) \times (n+1)$

$$A_h = \frac{1}{h^2}$$

$$b_h = \begin{bmatrix} f(x_1) + \frac{u_1}{h^2} \\ f(x_2) \\ \vdots \\ f(x_N) \\ f(x_{N+1}) \end{bmatrix}$$

↳ On aimerait que A_h soit symétrique. Pour cela, on peut voir que le système linéaire $A_h u_h = b_h$ reste le même si on divise sa dernière ligne par 2:

$$[-2u_N + 2u_{N+1} = f(x_{N+1})] \Leftrightarrow [-u_N + u_{N+1} = f(x_{N+1})/2]$$

Ceci nous pousse à remplacer les A_h et b_h précédents par :

$$A_h = \begin{pmatrix} 2 & -\lambda & & 0 \\ -\lambda & 2 & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 2 & -\lambda \\ & & & -\lambda & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad b_h = \begin{pmatrix} f(x_1) \\ f(x_2) \\ \vdots \\ f(x_N) \\ f(x_{N+1})/2 \end{pmatrix}.$$

voilà...

- (b) Montrer que le schéma s'écrit sous la forme d'un système linéaire $A_h u_h = b_h$ d'inconnue $u_h = (u_1, \dots, u_{N+1})^T$ où chaque u_i sera une approximation de $u(x_i)$, $i = 1, \dots, N+1$. Ecrire le système de telle sorte que A_h soit symétrique.

2. Etude de la consistance du schéma :

On définit la projection de la solution exacte u de (1) sur les points du maillage où on cherche la valeur de u :

$$\pi_h(u) = \begin{pmatrix} u(x_1) \\ \vdots \\ u(x_{N+1}) \end{pmatrix}$$

et l'erreur de consistance :

$$\varepsilon_h(u) = A_h \pi_h(u) - b_h.$$

D'après les calculs faits en cours pour le problème avec la condition $u(1) = u_d$, on obtient pour $i = 1, \dots, N$ la majoration suivante de la i -ième coordonnée de $\varepsilon_h(u)$:

$$|(\varepsilon_h(u))_i| \leq \frac{h^2}{12} \sup_{x \in [0,1]} |u^{(4)}(x)| \quad (4)$$

- (a) Montrer que pour $i = N+1$, on obtient la majoration suivante de la $(N+1)$ -ième coordonnée de $\varepsilon_h(u)$:

$$|(\varepsilon_h(u))_{N+1}| \leq \frac{h}{6} \sup_{x \in [0,1]} |u^{(3)}(x)| \quad (5)$$

2) on utilise la définition de l'erreur de consistance: pour la marginale $i=N+1$,

$$\begin{aligned} (\varepsilon_h(u))_{i=N+1} &\stackrel{\text{DÉF}}{=} [A_h \pi_h(u)]_{i=N+1} - (b_h)_{i=N+1} \quad \left(\begin{array}{l} \text{c'est nul si on remplace} \\ \pi_h(u) \text{ par } u_h; \text{ on voudrait} \\ \text{que ça soit petit lorsque } h \rightarrow 0; \end{array} \right) \\ &= \frac{1}{h^2} (-u(x_N) + u(x_{N+1})) - f(x_{N+1})/2 \\ &= \frac{1}{h^2} (-u(1-h) + u(1)) - f(1)/2 \quad \text{puisque } x_N = 1-h, \quad h = \frac{1}{N+1} \\ &= \frac{1}{h^2} (-u(1-h) + u(1)) + u''(1)/2 \quad \text{puisque } u \text{ sol}^\circ \text{ de l'EDP } -u'' = f \end{aligned}$$

Maintenant Taylor-Lagrange (toujours lui pour la consistance) à l'ordre 3 :

↑
approprié à la
vue de (5)

$$u(1-h) = u(1) - h u'(1) + \frac{h^2}{2} u''(1) - \frac{h^3}{6} u^{(3)}(\xi), \quad \xi \in [1-h; 1]$$

$$\text{donc } -u(1-h) + u(1) = \underbrace{h u'(1)}_{=0} - \frac{h^2}{2} u''(1) + \frac{h^3}{6} u^{(3)}(\xi)$$

car u vérifie la condition de Neumann en $x=1$

$$\text{donc } \frac{1}{h^2} (-u(1-h) + u(1)) = -\frac{1}{2} u''(1) + \frac{h}{6} u^{(3)}(\xi)$$

$$\text{Donc } (\varepsilon_h(u))_{N+1} = \frac{h}{6} u^{(3)}(\xi)$$

$$\text{Par conséquent, } |(\varepsilon_h(u))_{N+1}| = \frac{h}{6} |u^{(3)}(\xi)| \leq \frac{h}{6} \|u^{(3)}\|_{L^\infty(0,1)}$$

CQFD.

(b) Conclure pour la consistance du schéma, et donner un exemple de fonction f pour laquelle le schéma est exact.

2) b) Par (4)-(5),

$$\|\varepsilon_h(u)\|_\infty = \max \left\{ \|(\varepsilon_h(u))_{i=1}^N\|_\infty ; |(\varepsilon_h(u))_{N+1}| \right\}$$

$$\stackrel{(4)-(5)}{\leq} \max \left\{ \frac{h^2}{12} \|u^{(4)}\|_{L^\infty} ; \frac{h}{6} \|u^{(3)}\|_{L^\infty} \right\}$$

↳ C'est h qui disparaît le moins vite lorsque $h \rightarrow 0$
 $\Rightarrow$ l'ordre est $\underline{2}$ (h^2)

$$\hookrightarrow \forall h \in (0,1), \quad h^2 < h \quad \text{et} \quad \frac{1}{12} \leq \frac{1}{6} \quad \text{donc} \quad \frac{h^2}{12} \leq \frac{h}{6}.$$

$$\text{Donc } \|\varepsilon_h(u)\|_\infty \leq \frac{h}{6} \max \left\{ \|u^{(3)}\|_{L^\infty} ; \|u^{(4)}\|_{L^\infty} \right\} =: Ch^2$$

↳ Le schéma est consistant d'ordre 1 pour $\|\cdot\|_\infty$.

↳ Le schéma est exact si la solution de l'EOP vérifie $\varepsilon_h(u) = 0_{\mathbb{R}^{N+1}}$.

Pour cela, il est suffisant d'avoir u tel que $\frac{h}{6} \max \{ \|u^{(1)}\|_{L^\infty}; \|u^{(n)}\|_{L^\infty} \} = 0$

Donc $[f \equiv \text{cte}] \Rightarrow [\text{schéma exact}]$.

$\uparrow$
 $u^{(1)} \equiv 0$

$\Downarrow$
 $u^{(n)} \equiv \text{cte}$

"
 f (puisque u solution)

3. Etude de la convergence du schéma :

Comme vu en cours, la matrice A_h vérifie un principe du maximum discret :

$$\forall x \in \mathbb{R}^{N+1}, (A_h x \geq 0 \Rightarrow x \geq 0)$$

où $y \geq 0$ signifie $y_i \geq 0, \forall i$, et en conséquence, A_h est inversible et les coefficients de A_h^{-1} , qu'on notera $\alpha_{i,j}$, sont tous supérieurs ou égaux à 0.

(a) On décompose $\varepsilon_h(u)$ en séparant les N premières coordonnées et la dernière :

$$\varepsilon_h(u) = \bar{\varepsilon}_h(u) + \tilde{\varepsilon}_h(u) \text{ où } \bar{\varepsilon}_h(u) = \begin{pmatrix} (\varepsilon_h(u))_1 \\ \vdots \\ (\varepsilon_h(u))_N \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } \tilde{\varepsilon}_h(u) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ (\varepsilon_h(u))_{N+1} \end{pmatrix}$$

On décompose aussi A_h^{-1} en séparant les N premières colonnes et la dernière :

$$A_h^{-1} = \bar{B}_h + \tilde{B}_h$$

$$\text{où } \bar{B}_h = \begin{pmatrix} \alpha_{1,1} & \dots & \alpha_{1,N} & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \alpha_{N+1,1} & \dots & \alpha_{N+1,N} & 0 \end{pmatrix} \text{ et } \tilde{B}_h = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \alpha_{1,N+1} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \alpha_{N+1,N+1} \end{pmatrix}.$$

Vérifier que l'erreur de convergence $\pi_h(u) - u_h$ peut alors se décomposer en :

$$\pi_h(u) - u_h = \bar{B}_h \bar{\varepsilon}_h(u) + \tilde{B}_h \tilde{\varepsilon}_h(u) \quad (6)$$

$$3) a) \quad G_n \quad a \quad A_h m_h = b_h$$

$$\text{Er} \quad \varepsilon_h(m) = A_h \pi_h(m) - b_h$$

$$\text{Donc} \quad \varepsilon_h(m) = A_h \pi_h(m) - A_h m_h \\ = A_h (\pi_h(m) - m_h)$$

$$\text{Donc} \quad \pi_h(m) - m_h = A_h^{-1} \varepsilon_h(m)$$

$$= [\bar{B}_h - \tilde{B}_h] [\bar{\varepsilon}_h(m) - \tilde{\varepsilon}_h(m)]$$

$$\bar{B}_h = \begin{pmatrix} \boxed{\text{matrix}} & \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

$$\tilde{B}_h = \begin{pmatrix} 0 & \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

$$\bar{\varepsilon}_h(m) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

$$\tilde{\varepsilon}_h(m) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

$$= \bar{B} \bar{\varepsilon} + \underbrace{\bar{B} \tilde{\varepsilon}}_{=0} + \underbrace{\tilde{B} \bar{\varepsilon}}_{=0} + \tilde{B} \tilde{\varepsilon} \quad (\text{faire les produits à la main})$$

$$\pi_h(m) - m_h = \bar{B}_h \bar{\varepsilon}_h(m) + \tilde{B}_h \tilde{\varepsilon}_h(m)$$

cqfd

(b) Majoration de $\|\bar{B}_h\|_\infty$:

i. Montrer que $\|\bar{B}_h\|_\infty = \|A_h^{-1} \bar{e}\|_\infty$ où $\bar{e} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{N+1}$.

b) i) $\Delta \bar{B}_h$ MATRICE vs $A_h^{-1} \bar{e}$ vecteur donc pas d'égalité possible...

↳ En revanche, possible égalité des normes...

Rappel: Pour $M \in \mathbb{R}^{N \times N}$, $\|M\|_\infty = \max_{i \in \llbracket 1; N \rrbracket} \left\{ \sum_{j=1}^N |m_{ij}| \right\}$ (on somme sur les colonnes puis on maximise le résultat sur les lignes)

$$\text{e.g.: } \left\| \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \right\|_\infty = \max \left\{ |1|+|2|+|3| ; |4|+|5|+|6| ; |7|+|8|+|9| \right\}$$

$$= 24.$$

$$\bar{B}_h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \|\bar{B}_h\|_\infty = \max_{i \in \llbracket 1; N+1 \rrbracket} \left\{ \sum_{j=1}^{N+1} (\bar{B}_{ij}) \right\} = \max_{i \in \llbracket 1; N+1 \rrbracket} \left\{ \sum_{j=1}^N (\bar{B}_{ij}) + 0 \right\}$$

pas de 1.1
car on sait
que les coef de
 $A_h^{-1} = \bar{B}_h + \tilde{B}_h$
sont positifs
(principe du maximum
discret)

$$\Rightarrow \text{De l'autre côté, } \|A_h^{-1} \bar{e}\|_\infty = \max_{i \in \llbracket 1; N+1 \rrbracket} \left\{ |A_h^{-1} \bar{e}| \right\}$$

$$= \max_{i \in \llbracket 1; N+1 \rrbracket} \left\{ \left| A_h^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right| \right\}$$

$$= \max_{i \in \llbracket 1; N+1 \rrbracket} \left\{ \left| \sum_{j=1}^N (A_h^{-1})_{ij} \times 1 + 0 \right| \right\}$$

$$= \max_{i \in \llbracket 1; N+1 \rrbracket} \left\{ \left| \sum_{j=1}^N (A_h^{-1})_{ij} \right| \right\}$$

tous positifs: on peut éliminer 1.1

$$= \max_{i \in \llbracket 1; N+1 \rrbracket} \left\{ \left| \sum_{j=1}^N (A_h^{-1})_{ij} \right| \right\}$$

$$= \max_{i \in \llbracket 1; N+1 \rrbracket} \left\{ \sum_{j=i}^N \bar{B}_{ij} \right\}$$

$$= \|\bar{B}_h\|_{\infty}$$

CQFD

- ii. Montrer que $A_h \pi_h(v_h) = \bar{e}$ pour $v_h(x) = -\frac{x^2}{2} + r_h x$ avec r_h choisi convenablement.
- iii. En déduire que $\|\bar{B}_h\|_{\infty} \leq \frac{1}{2}$.

b) ii) On prend $v_h(x) = -\frac{x^2}{2} + r_h x$ puis on calcule:

$$A_h \pi_h(v_h) = A_h \begin{bmatrix} v_h(x_1) \\ \vdots \\ v_h(x_{N+1}) \end{bmatrix} = \frac{1}{h^2} \begin{bmatrix} 2v_h(x_1) - v_h(x_2) \\ -v_h(x_{i-1}) + 2v_h(x_i) - v_h(x_{i+1}) \\ -v_h(x_N) + v_h(x_{N+1}) \end{bmatrix}$$

↳ Puisque v_h est un polynôme de degré 2, on utilise Taylor-Lagrange à

l'ordre 3 (puisque $v_h^{(3)} = 0$ les restes sont nuls):

$$\begin{cases} v_h(x_{i+1}) = v_h(x_i + h) = v_h(x_i) + h v_h'(x_i) + \frac{h^2}{2} v_h''(x_i) + 0 \\ v_h(x_{i-1}) = v_h(x_i - h) = v_h(x_i) - h v_h'(x_i) + \frac{h^2}{2} v_h''(x_i) + 0 \end{cases}$$

$$-v_h''(x_i) = \frac{1}{h^2} (-v_h(x_{i-1}) + 2v_h(x_i) - v_h(x_{i+1})) \quad (\text{EXACT})$$

↳ Et pour $i=1$, $x_{i-1} = x_0 = 0$ et $v_h(0) = 0$, donc

$$-v_h''(x_1) = \frac{1}{h^2} (-\underbrace{v_h(x_0)}_{=0} + 2v_h(x_1) - v_h(x_2)) = \frac{1}{h^2} (2v_h(x_1) - v_h(x_2))$$

On a donc, à ce stade, $A_h \pi_h(v_h) = \begin{pmatrix} -v_h''(x_1) \\ -v_h''(x_2) \\ \vdots \\ -v_h''(x_N) \\ \bar{z}_h \end{pmatrix}$, où $\bar{z}_h := \frac{1}{h^2} (-v_h(x_N) + v_h(x_{N+1}))$

↳ Pour conclure, reste à montrer que $z_h = 0$ pour une constante π_h bien choisie:

$$O_n \text{ a } z_h = 0 \stackrel{\text{oéf}}{\Leftrightarrow} \frac{1}{h^2} \left(-v_h(n_h) + v_h(n_{h+1}) \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow v_h(n_h) = v_h(n_{h+1})$$

$$\Leftrightarrow -\frac{(1-h)^2}{2} + \pi_h(1-h) = -\frac{1^2}{2} + \pi_h \cdot 1 = \pi_h - \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{2} - \frac{h^2}{2} + h + \pi_h - h\pi_h = \pi_h - \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow h\left(-\frac{h}{2} + 1 - \pi_h\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\pi_h = 1 - \frac{h}{2}}$$

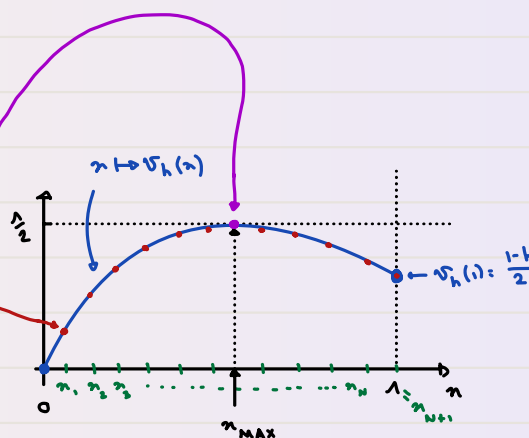
Par conséquent, pour $\pi_h = 1 - \frac{h}{2}$, on a $A_h \pi_h(v_h) = \begin{pmatrix} \hat{1} \\ \hat{1} \\ \hat{0} \end{pmatrix} = \bar{e}$. CQFD

b) iii) (En déduire que $\|\bar{B}_h\|_\infty \leq \frac{1}{2}$)

$$\|\bar{B}_h\|_\infty \stackrel{(i)}{=} \|A_h' \bar{e}\|_\infty \stackrel{(ii)}{=} \|A_h' A_h \pi_h(v_h)\|_\infty$$

$$= \|\pi_h(v_h)\|_\infty$$

$$\leq \sup_{(0,1)} |v_h|$$



$$v_h'(n_{\max}) = 0 \Leftrightarrow -n_{\max} + \pi_h = 0$$

$$\Leftrightarrow n_{\max} = \pi_h = 1 - \frac{h}{2}$$

$$\text{Et alors } \sup_{(0,1)} |v_h| = v(n_{\max}) = -\frac{n_{\max}^2}{2} + \pi_h n_{\max}$$

$$= -\frac{\pi_h^2}{2} + \pi_h^2$$

$$= \frac{\pi_h^2}{2} = \frac{(1-h/2)^2}{2} \leq \frac{1}{2}$$

Ainsi, $\|\tilde{B}_h\|_\infty \leq \frac{1}{2}$ CQFD

(c) Majoration de $\|\tilde{B}_h\|_\infty$:

i. Montrer que $\|\tilde{B}_h\|_\infty = \|A_h^{-1}\tilde{e}\|_\infty$ où $\tilde{e} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{N+1}$.

ii. Montrer que $A_h \pi_h(w_h) = \tilde{e}$ pour $w_h(x) = hx$.

iii. En déduire que $\|\tilde{B}_h\|_\infty = h$.

c) i) $\|\tilde{B}_h\|_\infty = \max_{i \in \llbracket 1; N+1 \rrbracket} \sum_{j=1}^{N+1} |\tilde{B}_{ij}| = \max_{i \in \llbracket 1; N+1 \rrbracket} |\tilde{B}_{i, N+1}| = \max_{i \in \llbracket 1; N+1 \rrbracket} \{\alpha_{i, N+1}\}$
 (avec $\tilde{B}_h = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$)
 qu'on a appelé $\alpha_{i, N+1}$ et qui sont positif donc on se débarrasse des |.

D'autre part, $A_h^{-1}\tilde{e} = A_h^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{1, N+1} \\ \alpha_{2, N+1} \\ \vdots \\ \alpha_{N+1, N+1} \end{pmatrix}$

Donc $\|A_h^{-1}\tilde{e}\|_\infty = \max_{i \in \llbracket 1; N+1 \rrbracket} |\alpha_{i, N+1}| = \max_{i \in \llbracket 1; N+1 \rrbracket} \{\alpha_{i, N+1}\}$

Ainsi, on a bien $\|\tilde{B}_h\|_\infty = \|A_h^{-1}\tilde{e}\|_\infty$. CQFD

c) ii) Comme précédemment, on calcule:

$A_h \pi_h(w_h) = A_h \begin{pmatrix} h n_1 \\ h n_2 \\ \vdots \\ h n_{N+1} \end{pmatrix} = \underbrace{\frac{1}{h^2} x h}_{= \frac{1}{h}} \begin{pmatrix} 2n_1 - n_2 \\ \vdots \\ -n_{i-1} + 2n_i - n_{i+1} \\ \vdots \\ -n_N + n_{N+1} \end{pmatrix}$
 (avec $n \rightarrow hn$)

= $\begin{pmatrix} 2h - 2h \\ \vdots \\ -(i-1)h + 2ih - (i+1)h \\ \vdots \\ -Nh + (N+1)h \end{pmatrix} = \frac{1}{h} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \tilde{e}$ CQFD

c) iii) De même que précédemment;

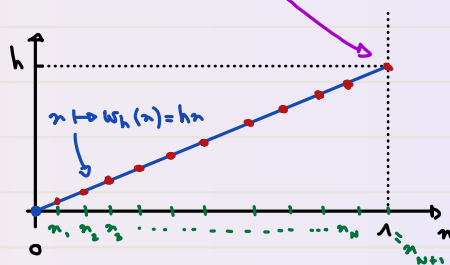
$$\|\tilde{\beta}_h\|_\infty \stackrel{(i)}{=} \|A_h^{-1} \tilde{e}\|_\infty \stackrel{(ii)}{=} \|A_h^{-1} A_h \pi_h(w_h)\|_\infty$$

$$= \|\pi_h(w_h)\|_\infty$$

$$= \max \begin{pmatrix} h \cdot h \\ 2h \cdot h \\ 3h \cdot h \\ \vdots \\ nh \cdot h \\ (n+1)h \cdot h = h \end{pmatrix}$$

$$= h.$$

w_h atteint son maximum en $n=1$
et vaut $h = w_h(1) = (\pi_h(w_h))_{i=N+1}$



(d) Conclusion pour l'erreur de convergence : Montrer que :

$$\|u_h - \pi_h(u)\|_\infty \leq \frac{h^2}{6} \left(\frac{1}{4} \sup_{x \in [0,1]} |u^{(4)}(x)| + \sup_{x \in [0,1]} |u^{(3)}(x)| \right)$$

et donner l'ordre de convergence.

d) On réunit tous les éléments dont on dispose:

$$\|u_h - \pi_h(u)\|_\infty \stackrel{(c)}{=} \|\bar{\beta}_h \bar{\varepsilon}_h(u) + \tilde{\beta}_h \tilde{\varepsilon}_h(u)\|_\infty$$

INÉGALITÉ
TRIANGULAIRE

$$\leq \|\bar{\beta}_h \bar{\varepsilon}_h(u)\|_\infty + \|\tilde{\beta}_h \tilde{\varepsilon}_h(u)\|_\infty$$

sous-multiplicativité
de la norme subordonnée

$$\|A \cdot v\| \leq \|A\|_x \|v\|$$

$$\leq \underbrace{\|\bar{\beta}_h\|_\infty}_{\leq \frac{1}{2} \text{ cf. q. 6.iii}} \cdot \|\bar{\varepsilon}_h(u)\|_\infty + \underbrace{\|\tilde{\beta}_h\|_\infty}_{\leq h \text{ cf. q. c. iii}} \cdot \|\tilde{\varepsilon}_h(u)\|_\infty \quad \left. \vphantom{\|\bar{\beta}_h\|_\infty} \right\} \text{ STABILITÉ!}$$

$$\leq \underbrace{\frac{1}{2} \cdot \|\bar{\varepsilon}_h(u)\|_\infty}_{\leq \frac{h^2}{12} \|u^{(4)}\|_{L^\infty} \text{ cf. (u)}} + \underbrace{h \cdot \|\tilde{\varepsilon}_h(u)\|_\infty}_{\leq \frac{h}{6} \|u^{(3)}\|_{L^\infty} \text{ cf. (s)}} \quad \left. \vphantom{\|\bar{\varepsilon}_h(u)\|_\infty} \right\} \text{ CONSISTANCE}$$

$$\leq \frac{h^2}{12} \|u^{(n)}\|_{L^\infty} + \frac{h^2}{6} \|u^{(3)}\|_{L^\infty}$$

$$= \frac{h^2}{6} \left(\frac{1}{h} \|u^{(n)}\|_{L^\infty} + \|u^{(3)}\|_{L^\infty} \right)$$

$$= Ch^2$$

↳ Le schéma est convergent d'ordre 2 pour la norme $\|\cdot\|_\infty$. $\square$