Analyse numérique – 2026-2027 – TD Liste 2
Equation parabolique de la chaleur
(énoncés et indications)

Dans tous les exercices de la liste, on considère l'équation parabolique de la chaleur :

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = 0, \ \forall x \in]0,1[, \ \forall t \in]0,T[\tag{1}$$
$$u(0,t) = u_g, \ \forall t \in [0,T] \tag{2}$$
$$u(1,t) = u_d, \ \forall t \in [0,T] \tag{3}$$
$$u(x,0) = u_0(x), \ \forall x \in [0,1] \tag{4}$$

Exercice 1 (Recherche de solutions exactes)
On suppose $u_g = u_d = 0$. On souhaite déterminer des solutions, à variables séparées, de la forme $u(x,t) = v(x)w(t)$.

1. On suppose qu'une telle fonction vérifie l'équation (1). Montrer qu'il existe une constante réelle K telle qu'en tout (x,t) tel que $v(x) \neq 0$ et $w(t) \neq 0$, on ait $v''(x) = Kv(x)$ et $w'(t) = Kw(t)$. Réciproquement, vérifier que si $u(x,t) = v(x)w(t)$ avec $v(x)$ et $w(t)$ telles que $v''(x) = Kv(x)$ pour tout x, et $w'(t) = Kw(t)$ pour tout t, où K est une constante réelle, alors $u(x,t)$ vérifie (1).
2. Déterminer les fonctions $v(x)$ solutions de $v''(x) = Kv(x)$ et les fonctions $w(t)$ solutions de $w'(t) = Kw(t)$, suivant que $K = 0$, $K = -c^2 < 0$ ou $K = c^2 > 0$. On considère maintenant des fonctions $u(x,t) = v(x)w(t)$ obtenues avec de telles solutions.
3. Supposons $K \geq 0$. Vérifier que si $u(x,t)$ vérifie les conditions aux limites (2) et (3), alors u est nécessairement nulle, et solution du problème seulement si la solution initiale u_0 est nulle.
4. Supposons $K < 0$ et $K = -c^2$. Montrer que si $c = k\pi$, $k \in \mathbb{N}^*$, on obtient une solution non nulle de la forme $u(x,t) = b_k \sin(k\pi x)\exp(-k^2\pi^2 t)$ pour la solution initiale $u_0(x) = b_k \sin(k\pi x)$, où b_k est une constante réelle. En déduire la solution exacte pour la solution initiale $u_0(x) = \sin(\pi x) + \frac{1}{4}\sin(10\pi x)$.

Exercice 2 (Consistance et convergence du schéma explicite)
On considère un maillage espace-temps de $[0,1]\times[0,T]$, de pas $h=\frac{1}{N+1}$ en espace avec les points discrets $x_i = ih$, $i=0,\dots,N+1$, et de pas $\Delta t = \frac{T}{M+1}$ en temps avec les instants discrets $t_j = j\Delta t$, $j=0,\dots,M+1$.

Pour $j=0,\dots,M+1$, on note $U^{(j)}$ le vecteur de $\mathbb{R}^N$ des valeurs $u_i^{(j)}$, $i=1,\dots,N$ qu'on souhaite déterminer, pour approcher les valeurs de la solution exacte $u(x_i,t_j)$, par le schéma explicite :

$$U^{(j+1)} = U^{(j)} - \Delta t\, A_h\, U^{(j)} + \Delta t\, C^{(j)},\ j=0,\dots,M \tag{5}$$

où A_h et $C^{(j)}$ désignent la matrice carrée de dimension N et le vecteur de longueur N suivants :

$$A_h = \frac{1}{h^2}\begin{pmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & 0 \\ & -1 & 2 & -1 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & 0 & & \ddots & \ddots & -1 \\ & & & & -1 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } C^{(j)} = \begin{pmatrix} f(x_1,t_j)+\frac{u_g}{h^2} \\ f(x_2,t_j) \\ \vdots \\ f(x_{N-1},t_j) \\ f(x_N,t_j)+\frac{u_d}{h^2} \end{pmatrix}$$

On note $\pi_h u(t)$ la projection de la solution exacte u à l'instant t sur les points intérieurs x_i du maillage de $[0,1]$:

$$\pi_h u(t) = \begin{pmatrix} u(x_1,t) \\ \vdots \\ u(x_N,t) \end{pmatrix}$$

et $\varepsilon_h(u)^{(j)}$ l'erreur de consistance à l'itération j :

$$\varepsilon_h(u)^{(j)} = \frac{\pi_h u(t_{j+1}) - \pi_h u(t_j)}{\Delta t} + A_h \pi_h u(t_j) - C^{(j)}$$

On suppose que les valeurs u_g et u_d sont compatibles avec la fonction $u_0(x)$, c'est-à-dire que $u_0(0)=u_g$ et $u_0(1)=u_d$, et que les données $f(x,t)$ et $u_0(x)$ sont telles que le problème admette une et une seule solution exacte $u(x,t)$ sur $[0,1]\times[0,T]$, et que cette solution $u(x,t)$ soit de classe C^4 relativement à x et de classe C^2 relativement à t.

1. Montrer que le schéma est consistant en norme $\|.\|_\infty$, d'ordre 2 en espace et d'ordre 1 en temps :

$$\max_{0\le j\le M+1} \|\varepsilon_h(u)^{(j)}\|_\infty \le \frac{h^2}{12} \sup_{[0,1]\times[0,T]} \left|\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\right| + \frac{\Delta t}{2} \sup_{[0,1]\times[0,T]} \left|\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right|$$

2. Pour étudier la convergence du schéma, on considère l'erreur $e^{(j)}$ à l'instant t_j :

$$e^{(j)} = U^{(j)} - \pi_h u(t_j)$$

(a) Montrer que pour $i = 1, \ldots, N$:

$$e_i^{(j+1)} = (1-2r)e_i^{(j)} + re_{i-1}^{(j)} + re_{i+1}^{(j)} - \Delta t(\varepsilon_h(u))_i^{(j)}$$

avec $r = \dfrac{\Delta t}{h^2}$, et en posant $e_0^{(j)} = e_{(N+1)}^{(j)} = 0$.

(b) Montrer que sous la condition :

$$\frac{\Delta t}{h^2} \leq \frac{1}{2}$$

le schéma est convergent en norme $\|.\|_\infty$, d'ordre 2 en espace et 1 en temps, c'est-à-dire qu'il existe une constante $C(u,T)$ qu'on précisera telle que :

$$\max_{0 \leq j \leq M+1} \|e^{(j)}\|_\infty \leq C(u,T)\,(h^2 + \Delta t)$$

Exercice 3 (Theta-schéma pour l'équation de la chaleur)
On suppose ici $u_g = u_d = 0$. On reprend le maillage espace-temps de l'exercice précédent avec les mêmes notations. On considère le schéma explicite :

$$U^{(j+1)} = U^{(j)} - \Delta t\, A_h\, U^{(j)} + \Delta t\, C^{(j)},\ j = 0, \ldots, M \tag{6}$$

et le schéma implicite :

$$U^{(j)} = U^{(j-1)} - \Delta t\, A_h\, U^{(j)} + \Delta t\, C^{(j)},\ j = 1, \ldots, M+1 \tag{7}$$

où A_h et $C^{(j)}$ désignent respectivement la matrice carrée de dimension N et le vecteur de longueur N suivants :

$$A_h = \frac{1}{h^2}\begin{pmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & 0 \\ & -1 & 2 & -1 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & 0 & & \ddots & \ddots & -1 \\ & & & & -1 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } C^{(j)} = \begin{pmatrix} f(x_1, t_j) \\ f(x_2, t_j) \\ \vdots \\ f(x_{N-1}, t_j) \\ f(x_N, t_j) \end{pmatrix}$$

On rappelle que les valeurs propres de A_h sont données par :

$$\lambda_k = \frac{4}{h^2}\sin^2\left(\frac{k\pi}{2(N+1)}\right),\ k = 1 \ldots, N$$

et qu'un schéma de la forme :

$$U^{(j+1)} = BU^{(j)} + \Delta t\, D^{(j)},\ j = 0, \ldots, M \tag{8}$$

avec B matrice normale (c'est-à-dire telle que $BB^T = B^TB$), est stable en norme $\|.\|_h$ si et seulement si le rayon spectral de B est inférieur ou égal à 1, où $\|.\|_h$ désigne la norme

sur $\mathbb{R}^N$ définie par $\|v\|_h = \sqrt{h}\|v\|_2 = (h\sum_{i=1}^N v_i^2)^{1/2}$, pour $v \in \mathbb{R}^N$ et $h = \frac{1}{N+1}$.

Soit $\theta \in [0,1]$. On considère le θ-schéma :

$$\begin{aligned} U^{(j+1)} = &(1-\theta)\left(U^{(j)} - \Delta t\, A_h\, U^{(j)} + \Delta t\, C^{(j)}\right) \\ &+ \theta\left(U^{(j)} - \Delta t\, A_h\, U^{(j+1)} + \Delta t\, C^{(j+1)}\right),\ j = 0,\dots,M \end{aligned} \tag{9}$$

1. Ecrire ce schéma sous la forme (8). Vérifier que la matrice B obtenue est normale.
2. Déterminer les valeurs propres μ_k de la matrice B en fonction des valeurs propres λ_k de A_h.
3. Montrer que le θ-schéma (9) est stable en norme $\|.\|_h$ si et seulement si

$$2 + (2\theta - 1)\Delta t\lambda_k \geq 0,\ k = 1,\dots,N.$$

4. On suppose $\theta \geq \frac{1}{2}$. Montrer que le θ-schéma (9) est inconditionnellement stable en norme $\|.\|_h$.
5. On suppose $\theta < \frac{1}{2}$. Montrer que le θ-schéma (9) est stable en norme $\|.\|_h$ quand h et Δt vérifient une condition qu'on donnera.
6. On suppose dans cette question que la fonction f est nulle. Pour $j = 0,\dots,M$, $i = 1,\dots,N$, on considère l'erreur de consistance au point (x_i, t_j) :

$$\begin{aligned} \varepsilon_h(u)_i^{(j)} = &\frac{u(x_i,t_{j+1}) - u(x_i,t_j)}{\Delta t} - \theta\frac{u(x_{i-1},t_{j+1}) - 2u(x_i,t_{j+1}) + u(x_{i+1},t_{j+1})}{h^2} \\ &- (1-\theta)\frac{u(x_{i-1},t_j) - 2u(x_i,t_j) + u(x_{i+1},t_j)}{h^2} \end{aligned} \tag{10}$$

On suppose que u est de classe C^4 sur $[0,1]\times[0,T]$. Montrer que'il existe α_i, $\beta_i \in [0,1]$ et σ_i, $\tau_i \in [0,T]$ tels que :

$$\begin{aligned} \varepsilon_h(u)_i^{(j)} = &(\frac{1}{2} - \theta)\Delta t\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i,t_j) + \frac{\Delta t^2}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}(x_i,\sigma_j) \\ &- \theta\left(\frac{\Delta t^2}{2}\frac{\partial^4 u}{\partial t^2\partial x^2}(x_i,\tau_j) + \frac{h^2}{12}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\alpha_i,t_{j+1})\right) \\ &- (1-\theta)\frac{h^2}{12}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\beta_i,t_j) \end{aligned}$$

En déduire que le θ-schéma (9) est consistant d'ordre 2 en espace et d'ordre 1 en temps, et en particulier d'ordre 2 en temps pour la valeur $\theta = \frac{1}{2}$.

Indications

Exercice 1

1. Se vérifie facilement en développant les dérivées partielles.
2. Pour $K = 0$, on obtient $v(x)$ affine et $w(t)$ constante.
   Pour $K = \pm c^2 \neq 0$, on obtient $v(x)$ combinaison linéaire de $\cos(cx)$ et $\sin(cx)$ ou $\cosh(cx)$ et $sinh(cx)$ suivant le signe de K et $w(t) = C\exp(Kt)$.
3. On regarde successivement pour $K = 0$ et $K = c^2 > 0$. Dans les deux cas, les conditions au bord $u(0,t) = u(1,t) = 0$ pour $t \in [0,T]$ entrainent que $v(x) = 0$, pour tout x ou $w(t) = 0$ pour tout t, d'où $u(x,t) = 0$ partout.
4. Cas $K = -c^2 < 0$. Les conditions $u(0,t) = u(1,t) = 0$ pour $t \in [0,T]$ entrainent que $v(0) = v(1) = 0$ ou $w(t) = 0$. On trouve que pour $c = k\pi$ avec $k \in \mathbb{N}^*$, on obtient une solution non nulle de la forme $u(x,t) = b_k \sin(k\pi x)\exp(-k^2\pi^2 t)$ pour la solution initiale $u_0(x) = b_k \sin(k\pi x)$, où b_k est une constante réelle. Pour la solution initiale $u_0(x) = \sin(\pi x) + \frac{1}{4}\sin(10\pi x)$, on utilise la linéarité des équations pour obtenir la solution $u(x,t)$ en additionnant les solutions obtenues pour $u_0(x) = \sin(\pi x)$ et $u_0(x) = \frac{1}{4}\sin(10\pi x)$.

Exercice 2

1. Utiliser des développements de Taylor pour développer les coordonnées $\varepsilon_h(u)_i^{(j)}$, et utiliser que u est solution de l'EDP du problème aux limites considéré.
2. (a) Utiliser la définition de l'erreur de consistance et écrire l'équation vérifiée par $\pi_h u(t_{j+1})$, à comparer avec (5).
   (b) Utiliser que $r > 0$ et que $1 - 2r > 0$. En déduire une propriété de combinaison convexe avec les normes ∞ des $e_i^{(j)}$. Traiter le terme de reste dû à l'erreur de consistance par récurrence et utiliser que $j\Delta t \leq T$.

Exercice 3

1. On obtient facilement B et $D^{(j)}$. La matrice B est de la forme $B = G^{-1}H$. On vérifie que B est symétrique donc normale.
2. On vérifie que B admet les mêmes vecteurs propres que A_h et on obtient ses valeurs propres :
$$\mu_k = \frac{1 - (1-\theta)\Delta t\lambda_k}{1 + \theta\Delta t\lambda_k},\ k = 1, \ldots, N$$
3. On vérifie que $\lambda_k > 0$ et on établit que
$$|\mu_k| \leq 1 \Leftrightarrow 2 + (2\theta - 1)\Delta t\lambda_k \geq 0$$
   . On conclut pour $\rho(B)$ puis pour la stabilité.
4. On a alors $2\theta - 1 \geq 0$. On déduit avec la question précédente que $\rho(B) \leq 1$ sans condition sur h et Δt.

5. On a alors $1 - 2\theta > 0$. Avec l'expression de λ_k, on transforme la condition de stabilité en une condition sur h et Δt.

6. On applique des développements de Taylor-Lagrange de u aux points (x_i, t_j) et (x_i, t_{j+1}), pour développer l'erreur de consistance. Dans ce développement on a un terme $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t_{j+1})$ qu'on développe au point (x_i, t_j). On replace ce développement dans l'expression précédente de la consistance. On simplifie en utilisant que u est solution du problème initial avec $f = 0$. De plus, comme on a supposé u assez régulière, en dérivant par rapport à t l'équation $\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)$, on obtient $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, t_j) = \frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x^2}(x_i, t_j)$. En remplaçant $\frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x^2}(x_i, t_j)$ par $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, t_j)$, on obtient l'expression demandée de l'erreur de consistance $\varepsilon_h(u)_i^{(j)}$.
   En majorant en valeur absolue on déduit une majoration de l'erreur de consistance et on obtient les ordres de convergence attendus.