Analyse numérique – 2026-2027 – TD Liste 1
Equation de la chaleur stationnaire
Introduction à la méthode des différences finies
(énoncés et indications)

Exercice 1 (Différences finies pour l'équation de Poisson 1D)
On considère le problème aux limites suivant :

$$\begin{cases} -u''(x) = f(x), \ x \in \Omega =]0,1] \\ u(0) = u_g, \ u'(1) = 0 \end{cases} \tag{1}$$

1. Ecriture du schéma différences finies :
   (a) Ecrire le schéma obtenu par la méthode des différences finies pour ce problème en utilisant une subdivision uniforme ($x_0 = 0, x_1, \ldots, x_{N+1} = 1$) de ($N+2$) points de l'intervalle $[0,1]$, de pas $h = \frac{1}{N+1}$ et les formules d'approximation suivantes pour les dérivées :

$$u''(x) \simeq \frac{u(x-h) - 2u(x) + u(x+h)}{h^2} \tag{2}$$

   pour la dérivée seconde en x_i, $i = 1, \ldots, N+1$ et

$$u'(x) \simeq \frac{u(x+h) - u(x-h)}{2h} \tag{3}$$

   pour la dérivée première en $x_{N+1} = 1$.
   (b) Montrer que le schéma s'écrit sous la forme d'un système linéaire $A_h u_h = b_h$ d'inconnue $u_h = (u_1, \ldots, u_{N+1})^T$ où chaque u_i sera une approximation de $u(x_i)$, $i = 1, \ldots, N+1$. Ecrire le système de telle sorte que A_h soit symétrique.
2. Etude de la consistance du schéma :
   On définit la projection de la solution exacte u de (1) sur les points du maillage où on cherche la valeur de u :

$$\pi_h(u) = \begin{pmatrix} u(x_1) \\ \vdots \\ u(x_{N+1}) \end{pmatrix}$$

et l'erreur de consistance :

$$\varepsilon_h(u) = A_h \pi_h(u) - b_h.$$

D'après les calculs faits en cours pour le problème avec la condition $u(1) = u_d$, on obtient pour $i = 1, \dots, N$ la majoration suivante de la i-ième coordonnée de $\varepsilon_h(u)$:

$$|(\varepsilon_h(u))_i| \leq \frac{h^2}{12} \sup_{x\in[0,1]} |u^{(4)}(x)| \tag{4}$$

(a) Montrer que pour $i = N+1$, on obtient la majoration suivante de la $(N+1)$-ième coordonnée de $\varepsilon_h(u)$:

$$|(\varepsilon_h(u))_{N+1}| \leq \frac{h}{6} \sup_{x\in[0,1]} |u^{(3)}(x)| \tag{5}$$

(b) Conclure pour la consistance du schéma, et donner un exemple de fonction f pour laquelle le schéma est exact.

3. Etude de la convergence du schéma :
Comme vu en cours, la matrice A_h vérifie un principe du maximum discret :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^{N+1},\ (A_h x \geq 0 \Rightarrow x \geq 0)$$

où $y \geq 0$ signifie $y_i \geq 0$, $\forall\, i$, et en conséquence, A_h est inversible et les coefficients de A_h^{-1}, qu'on notera $\alpha_{i,j}$, sont tous supérieurs ou égaux à 0.

(a) On décompose $\varepsilon_h(u)$ en séparant les N premières coordonnées et la dernière :

$$\varepsilon_h(u) = \bar{\varepsilon}_h(u) + \tilde{\varepsilon}_h(u) \text{ où } \bar{\varepsilon}_h(u) = \begin{pmatrix} (\varepsilon_h(u))_1 \\ \vdots \\ (\varepsilon_h(u))_N \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } \tilde{\varepsilon}_h(u) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ (\varepsilon_h(u))_{N+1} \end{pmatrix}$$

On décompose aussi A_h^{-1} en séparant les N premières colonnes et la dernière :

$$A_h^{-1} = \bar{B}_h + \tilde{B}_h$$

$$\text{où } \bar{B}_h = \begin{pmatrix} \alpha_{1,1} & \dots & \alpha_{1,N} & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \alpha_{N+1,1} & \dots & \alpha_{N+1,N} & 0 \end{pmatrix} \text{ et } \tilde{B}_h = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \alpha_{1,N+1} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \alpha_{N+1,N+1} \end{pmatrix}.$$

Vérifier que l'erreur de convergence $\pi_h(u) - u_h$ peut alors se décomposer en :

$$\pi_h(u) - u_h = \bar{B}_h \bar{\varepsilon}_h(u) + \tilde{B}_h \tilde{\varepsilon}_h(u) \tag{6}$$

(b) Majoration de $\|\bar{B}_h\|_\infty$:

i. Montrer que $\|\bar{B}_h\|_\infty = \|A_h^{-1}\bar{e}\|_\infty$ où $\bar{e} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{N+1}$.

ii. Montrer que $A_h\pi_h(v_h) = \bar{e}$ pour $v_h(x) = -\dfrac{x^2}{2} + r_h x$ avec r_h choisi convenablement.

iii. En déduire que $\|\bar{B}_h\|_\infty \leq \frac{1}{2}$.

(c) Majoration de $\|\tilde{B}_h\|_\infty$:

i. Montrer que $\|\tilde{B}_h\|_\infty = \|A_h^{-1}\tilde{e}\|_\infty$ où $\tilde{e} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{N+1}$.

ii. Montrer que $A_h\pi_h(w_h) = \tilde{e}$ pour $w_h(x) = hx$.

iii. En déduire que $\|\tilde{B}_h\|_\infty = h$.

(d) Conclusion pour l'erreur de convergence : Montrer que :

$$\|u_h - \pi_h(u)\|_\infty \leq \frac{h^2}{6}\left(\frac{1}{4}\sup_{x\in[0,1]}|u^{(4)}(x)| + \sup_{x\in[0,1]}|u^{(3)}(x)|\right)$$

et donner l'ordre de convergence.

Exercice 2 (Solutions exactes et différences finies pour l'équation de Laplace 2D) On considère une plaque carrée dont les côtés sont maintenus à des températures données : $u_d(x)$ sur le côté supérieur et 0 sur les trois autres côtés. La température $u(x, y)$ dans l'intérieur de la plaque (température d'état stationnaire) est solution du problème suivant :

$$\begin{cases} \Delta u(x,y) = 0, \ \forall\,(x,y) \in \Omega =]0,1[^2, \\ u(0,y) = u(1,y) = u(x,0) = 0, \ \forall\, x \in [0,1], \ \forall\, y \in]0,1[, \\ u(x,1) = u_d(x), \ \forall\, x \in [0,1]. \end{cases}$$

1. Recherche de solutions exactes. On souhaite déterminer des solutions, à variables séparées, de la forme $u(x, y) = v(x)w(y)$.

(a) On suppose qu'une telle fonction vérifie $\Delta u(x, y) = 0$. Montrer qu'il existe une constante réelle K telle qu'en tout (x, y) tel que $v(x) \neq 0$ et $w(y) \neq 0$, on ait $v''(x) = -Kv(x)$ et $w''(y) = Kw(y)$. Réciproquement, vérifier que si $u(x, y) = v(x)w(y)$ avec $v(x)$ et $w(y)$ telles que $v''(x) = -Kv(x)$ pour tout x, et $w''(y) = Kw(y)$ pour tout y, où K est une constante réelle, alors $\Delta u(x, y) = 0$.

(b) Déterminer les fonctions $v(x)$ solutions de $v''(x) = -Kv(x)$ et les fonctions $w(y)$ solutions de $w''(y) = Kw(y)$, suivant que $K = 0$, $K = -c^2 < 0$ ou $K = c^2 > 0$. On considère maintenant des fonctions $u(x, y) = v(x)w(y)$ obtenues avec de telles solutions.

(c) Supposons $K \leq 0$. Vérifier que si $u(x, y)$ vérifie les conditions aux limites du problème, alors u est nécessairement nulle, et solution du problème seulement si u_d est nulle.

(d) Supposons $K > 0$ et $K = c^2$. Montrer que si $c = k\pi$, $k \in \mathbb{N}^*$, on obtient des solutions non nulles qu'on déterminera, dans le cas où $u_d(x) = \sin(k\pi x)\sinh(k\pi)$.

2. Approximation par différences finies. Le carré Ω est maillé avec un pas uniforme $h = 1/(N+1)$ dans les deux directions :

$$\begin{cases} x_i = ih, \ i = 0, \ldots, N+1 \text{ dans la direction } x, \\ y_j = jh, \ j = 0, \ldots, N+1 \text{ dans la direction } y. \end{cases}$$

On cherche les valeurs $u_k = u_h(M_k) \simeq u(M_k)$ aux points M_k du maillage, situés à l'intérieur de Ω, numérotés de 1 à N^2, comme dans la figure suivante (exemple avec $N = 3$) :

7	8	9	
4	5	6	
1	2	3	

En suivant la méthode des différences finies, on approche Δu en un point M :

$$\begin{aligned} \Delta u(M) &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(M) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(M) \\ &\simeq \frac{1}{h^2}(u(E) - 2\,u(M) + u(O)) + \frac{1}{h^2}(u(N) - 2\,u(M) + u(S)) \\ &\simeq \frac{1}{h^2}(u(E) + u(O) + u(N) + u(S) - 4\,u(M)) \end{aligned}$$

où M point intérieur du maillage et E,O,N,S points voisins :

	N		
O	M	E	
	S		

En écrivant que $\Delta u(M_k) = 0$ aux points intérieurs à Ω, $k = 1, ..., N^2$, avec l'approximation proposée ci-dessus de Δu, on obtient un système linéaire $Au = b$, de dimension N^2, d'inconnue $u = (u_1, ..., u_{N^2})^T$, dont la matrice est symétrique et constituée de blocs carrés de dimension N. Déterminer ce système linéaire pour $N = 3$.

Indications

Exercice 1

(a) Comme $u(0)$, donc u_0, est donné, on obtient $N+1$ inconnues : $(u_i)_{i=1,\dots,N+1}$. Il faut donc obtenir $N+1$ équations. Il faut bien différencier les cas $i=1$ et $i=N+1$ des autres cas, en tenant compte des conditions aux limites. En particulier, la formule (3) doit permettre d'éliminer $u_{N+2} \approx u(1+h)$.

(b) Attention à la dernière ligne de A_h.

(d) On utilise le développement de Taylor suivant (en supposant la solution u de classe $\mathcal{C}^4([0,1])$) :

$$u(1-h) - u(1) = -hu'(1) + \frac{h^2}{2}u''(1) - \frac{h^3}{6}u^{(3)}(\xi), \quad \xi \in [1-h, 1]. \tag{7}$$

Ne pas oublier d'utiliser l'EDP pour remplacer $f(1)$ dans l'erreur de consistance. Penser également à utiliser la condition au bord $u'(1) = 0$.

(b) Pour que le schéma soit exact, il suffit que l'erreur de consistance soit nulle.

2. (a) Bien expliciter les produits matrice–vecteur.

(b) i. On rappelle que pour une matrice M (comprise comme un opérateur linéaire), sa norme est $\|M\|_\infty = \max_i \sum_j |m_{ij}|$.

ii. Expliciter $A_h \pi_h(v_h)$, utiliser la formule suivante obtenue grâce aux développements de Taylor :

$$u''(x_i) = \frac{1}{h^2}(u(x_{i+1}) - 2u(x_i) + u(x_{i-1})) - \frac{h^2}{12}u^{(4)}(\xi), \quad \xi \in [x_{i-1}, x_{i+1}],$$

et ajuster r_h pour annuler la dernière composante.

iii. Il suffit de combiner les deux questions précédentes et d'étudier la fonction v_h sur $[0,1]$.

(c) Mêmes remarques que pour le (b).

(d) Il faut prendre la norme infini de (6). En utilisant les majorations de $\bar{B}_h$ et $\tilde{B}_h$, il ne reste plus qu'à réutiliser l'estimation de l'erreur de consistance pour conclure. L'ordre de convergence correspond à l'exposant le plus petit de h dans l'estimation de convergence.

Exercice 2

1. (a) Se vérifie facilement en développant Δu.

(b) Pour $K = 0$, on obtient des solutions affines.
Pour $K = \pm c^2 \neq 0$, on obtient des solutions combinaisons linéaires de cos et sin, ou bien de cosh et sinh, en cx, suivant le signe de K.

(c) On regarde successivement pour $K = 0$ et $K = -c^2 < 0$. On utilise ensuite les conditions au bord $u(0,y) = u(1,y) = 0$ pour $y \in]0,1[$.

(d) Cas $K = c^2 > 0$. Utiliser d'abord les conditions $u(0,y) = u(1,y) = 0$ pour $y \in]0,1[$. Puis, si $c = k\pi$ avec $k \in \mathbb{N}^*$, utiliser la condition $u(x,0) = 0$. Conclure dans le cas où $u_d(x) = \sin(k\pi x)\sinh(k\pi)$.

2. Ecrire le problème pour $N = 3$. Ensuite c'est facile de généraliser à N quelconque. Il y a 9 inconnues u_1, ..., u_9, c'est-à-dire la solution u aux 9 points intérieurs. On écrit le système des 9 équations $\Delta u(M_k) = 0$, $k = 1, \ldots, 9$, en remplaçant $\Delta u(M_k)$ par son approximation :

$$\Delta u(M_k) \simeq \frac{1}{h^2}(u(E_k) + u(O_k) + u(N_k) + u(S_k) - 4\,u(M_k))$$

d'où le système :

$$4\,u(M_k) - u(E_k) - u(O_k) - u(N_k) - u(S_k) = 0,\ k = 1, \ldots, 9$$

où on remplacera les termes $u(E_k)$, $u(O_k)$, $u(N_k)$, $u(S_k)$ par $u(M_k)$ correspondant si on a affaire à un point intérieur, ou par la valeur donnée par les conditions aux limites si on a affaire à un point du bord. On obtient ainsi un système linéaire dont la matrice A est tridiagonale par blocs.