# Correction feuille 2

**Exercice 1.** *On se donne $A$, $B$ et $C$ trois événements (d'un univers $\Omega$). En utilisant les opérations de réunion, d'intersection et de complémentaire, représenter les événements suivants:*

(1) *$A$ seul se produit.*
(2) *$A$ et $B$ sont réalisés, mais pas $C$.*
(3) *Les trois événements se produisent en même temps.*
(4) *Au moins l'un des trois se produit.*
(5) *Aucun des trois ne se produit.*
(6) *Au moins deux se produisent.*
(7) *Un et un seul se produit.*

1) $A \cap \overline{B} \cap \overline{C}$

2) $A \cap B \cap \overline{C}$

3) $A \cap B \cap C$

4) $A \cup B \cup C$

5) $\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}$

6) $(A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C)$

7) $(A \cap \overline{B} \cap \overline{C}) \cup (\overline{A} \cap B \cap \overline{C}) \cup (\overline{A} \cap \overline{B} \cap C)$

**Exercice 2.** *Soit $X$ une variable aléatoire à valeurs dans $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$ dont la loi est déterminée par le tableau suivant :*

| $k$ | $-2$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\mathbb{P}(X = k)$ | $0,25$ | $0,125$ | ? | $0,25$ | $0,125$ |

(1) *Déterminer $\mathbb{P}(X = 0)$.*
(2) *Calculer l'espérance de $X$.*
(3) *Calculer $\mathbb{P}(X \geq 0)$.*

1) $\mathbb{P}(X=0) = 1 - \mathbb{P}(X \neq 0) = 1 - [0,25 + 0,125 + 0,25 + 0,125]$

$= 1 - 0,75$

$= 0,25$

2) $\mathbb{E}(X) = (-2)(0,25) + (-1)(0,125) + 0 \times (0,25) + (1)(0,25) + (2)(0,125)$

$= -0,125$

3) $\mathbb{P}(X \geq 0) = 1 - \mathbb{P}(X < 0) = 1 - [0,25 + 0,125] = 1 - 0,375 = 0,625$

**Exercice 3.** *Soit un couple de variables aléatoires discrètes $(X, Y)$ dont la loi est donnée par :*

| $X$ \ $Y$ | $-1$ | $0$ | $1$ |
|---|---|---|---|
| $-1$ | $1/9$ | $1/9$ | $0$ |
| $0$ | $0$ | $2/9$ | $1/9$ |
| $1$ | $1/9$ | $2/9$ | $1/9$ |

(1) *Donner les lois de $X$ et de $Y$ (Détailler au moins un calcul pour $X$ et un calcul pour $Y$).*
(2) *Que signifierait le fait que $X$ et $Y$ soient indépendantes : donnez la définition mathématique puis une interprétation de cette notion.*
(3) *Les variables aléatoires $X$ et $Y$ sont-elles indépendantes? Justifiez.*
(4) *Donner la loi de la somme $X + Y$. (commencer par donner la liste de toutes les valeurs possibles, puis pour chaque valeur possible $z$ calculer $\mathbb{P}(X + Y = z)$, enfin conclure en donnant le résultat sous forme de tableau)*

1) $\mathbb{P}(X=-1) = \mathbb{P}(\{X=-1\} \cap \{Y=-1\}) + \mathbb{P}(\{X=-1\} \cap \{Y=0\}) + \mathbb{P}(\{X=-1\} \cap \{Y=1\})$

$$= \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + 0$$

$$= \frac{2}{9}$$

| $x$ | $-1$ | $0$ | $1$ |
|---|---|---|---|
| $\mathbb{P}(X=x)$ | $\frac{2}{9}$ | $2/9$ | $\frac{4}{9}$ |

2) $X \perp\!\!\!\perp Y \iff \forall (x,y) \in \{-1\,;0\,;1\}^2, \quad \mathbb{P}(X=x\,; Y=y) = \mathbb{P}(X=x) \times \mathbb{P}(Y=y)$

3)

| $y$ | $-1$ | $0$ | $1$ |
|---|---|---|---|
| $\mathbb{P}(Y=y)$ | $\frac{2}{9}$ | $\frac{5}{9}$ | $\frac{2}{9}$ |

$\mathbb{P}(X=-1) \times \mathbb{P}(Y=-1) = \frac{2}{9} \times \frac{2}{9} = \frac{4}{81} \neq \frac{1}{9} = \mathbb{P}(X=-1\,; Y=-1)$

Lo $X$ et $Y$ ne sont pas $\perp\!\!\!\perp$.

$Z = X + Y$

| $Y \backslash X$ | $-1$ | $0$ | $1$ |
|---|---|---|---|
| $-1$ | $-2$ ($1/9$) | $-1$ ($1/9$) | $0$ ($0$) |
| $0$ | $-1$ ($0$) | $0$ ($2/9$) | $1$ ($1/9$) |
| $1$ | $0$ ($1/9$) | $1$ ($2/9$) | $2$ ($1/9$) |

| $z$ | $-2$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\mathbb{P}(Z=z)$ | $\frac{1}{9}$ | $\frac{1}{9}$ | $\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$ | $\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{9}$ |

**Exercice 4.** *Soit $X$ la variables aléatoire égale au résultat du lancer d'un dé équilibré à 6 faces*

(1) *Les événements «$X$ est pair » et «$X$ est supérieur ou égal à 5 » sont-ils indépendants?*
(2) *Les événements «$X$ est pair » et «$X$ est supérieur ou égal à 4 » sont-ils indépendants?*

1) $\mathbb{P}(X \text{ pair}) = \mathbb{P}(X \in \{2,4,6\}) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

$\mathbb{P}(X \geq 5) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

$\mathbb{P}(X_{\text{pair}} \cap X \geq 5) = \mathbb{P}(X=6) = \frac{1}{6} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \mathbb{P}(X_{\text{pair}}) \times \mathbb{P}(X \geq 5)$

↳ Donc $\{X \text{ pair}\} \perp\!\!\!\perp \{X \geq 5\}$

↳ Savoir que $X$ est pair ne change pas la proba que $X \geq 5$

↳ Savoir que $X \geq 5$ ne change pas la proba que $X$ est pair.

2) $\mathbb{P}(X \geq 4) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

$\mathbb{P}(X \geq 4 \,;\, X \text{ pair}) = \mathbb{P}(X \in \{4,6\}) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

$\mathbb{P}(X \geqslant 4) \times \mathbb{P}(X \text{ paire}) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \neq \frac{1}{3}$

$\hookrightarrow$ Donc $\{X \geqslant 4\}$ et $\{X \text{ pair}\}$ ne sont pas indépendants.

**Exercice 5.** *Une personne choisie au hasard dans la population a une probabilité $p$ d'avoir une maladie. Un test a été mis en place pour cette maladie. On note $p'$ la probabilité qu'une personne choisie au hasard dans la population ait un résultat positif à ce test. Si le test était parfait $p'$ serait égal à $p$. Rappelons qu'un faux positif est un résultat positif pour une personne non malade, un faux négatif est un résultat négatif pour une personne malade.*
*On sait que la probabilité qu'un résultat positif de ce test soit un faux positif est de 0,05, la probabilité qu'un résultat négatif soit un faux négatif est de 0,1.*
*Exprimer $p'$ à l'aide de $p$ et réciproquement.*

$p = \mathbb{P}(\text{l'individu est malade})$

$p' = \mathbb{P}(\text{test positif})$

$M$ : « malade »  $T$ : « test positif »

| | $M$ | $\overline{M}$ | |
|---|---|---|---|
| $T$ | $\alpha$ | $0{,}05$ | $p'$ |
| $\overline{T}$ | $0{,}1$ | $\beta$ | $0{,}1+\beta$ |
| | $p$ | $0{,}05+\beta$ | $1$ |

« Faux positif » $= \overline{M} \cap T$

« Faux négatif » $= M \cap \overline{T}$

$$\left.\begin{aligned} p &= 0{,}1 + \alpha \\ p' &= 0{,}05 + \alpha \end{aligned}\right\} L_1 - L_2 : p - p' = 0{,}1 - 0{,}05 = 0{,}05 \quad (*)$$

$$\left.\begin{aligned} p + 0{,}05 + \beta &= 1 \\ p' + 0{,}1 + \beta &= 1 \end{aligned}\right\} L_1 - L_2 : p - p' - 0{,}05 = 0$$

$\Downarrow$

$p - p' = 0{,}05 \quad (**)$

(A) et (**) expriment la même chose...

$$\boxed{p = p' + 0{,}05 \iff p' = p - 0{,}05}$$

**Exercice 6.** *La probabilité qu'un individu ait une réaction négative à l'injection d'un sérum est de* 0,1. *Pour un échantillon de* 7 *personnes, on prend comme variable aléatoire $X$ le nombre d'individus ayant une réaction négative au sérum.*

(1) *Quelles valeurs peut prendre $X$ ?*
(2) *Quelle loi suit $X$ ?*
(3) *Calculer en utilisant la formule vue en cours la probabilité pour que :*
  (a) *0 individu ait une réaction négative au sérum.*
  (b) *1 individu ait une réaction négative au sérum.*
  (c) *2 individus ait une réaction négative au sérum.*
  (d) *Au moins* 3 *individus aient une réaction négative au sérum.*
(4) *Quelle est la moyenne de $X$? Quelle est sa variance?*

1) $X \in \{0, \dots, 7\} =: [\![0, 7]\!]$

2) $X \rightsquigarrow \text{Binomiale}(n = 7,\ p = 0{,}1)$

3) $\mathbb{P}(X = 0) = (1 - 0{,}1)^7 = 0{,}9^7 \simeq 0{,}48$

$\mathbb{P}(X = 1) = \binom{7}{1} = 7 (0{,}1)^1 (0{,}9)^6 = 0{,}37$

$\mathbb{P}(X = 2) = \binom{7}{2} (0{,}1)^2 (0{,}9)^5 = 0{,}12$

$\binom{7}{2} = \dfrac{7 \times 6}{1 \times 2} = 7 \times 3 = 21$

$\mathbb{P}(X \geq 3) = 1 - \mathbb{P}(X \leq 2) = 1 - [0{,}48 + 0{,}37 + 0{,}12] = 0{,}48$

4) $\mathbb{E}(X) = np = 7 \times 0{,}1 = 0{,}7$

$\text{Var}(X) = np[1 - p] = 0{,}7 \times 0{,}9 = 0{,}63$

**Exercice 7.** *On note $X$ la variable aléatoire qui prend pour valeur le nombre de défauts sur le verre d'une ampoule. On admet que $X$ obéit à la loi de Poisson de paramètre $\lambda = 4$.*

(1) *Calculer en utilisant la formule du cours la probabilité des événements suivants :*
   (a) *Il n'y a aucun défaut sur l'ampoule.*
   (b) *Il y a au moins 2 défauts sur l'ampoule.*
   (c) *Le nombre de défauts est compris entre 2 et 5 (bornes comprises).*

$X \sim \mathcal{P}(\lambda = 4)$ $\qquad$ $\mathbb{P}(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$

1) a) $\mathbb{P}(X = 0) = \frac{4^0}{0!} e^{-4} = \frac{1}{1} \times e^{-4} = e^{-4} \simeq 0,02$

b) $\mathbb{P}(X \geq 2) = 1 - \mathbb{P}(X \leq 1) = 1 - \left(\mathbb{P}(X=0) + \mathbb{P}(X=1)\right)$

$= 1 - \left[e^{-4} + \frac{4}{1} e^{-4}\right] = 1 - 5e^{-4} = 0,90$

c) $\mathbb{P}(2 \leq X \leq 5) = \mathbb{P}(X=2) + \mathbb{P}(X=3) + \mathbb{P}(X=4) + \mathbb{P}(X=5)$

$= e^{-4}\left[\frac{4^2}{2!} + \frac{4^3}{3!} + \frac{4^4}{4!} + \frac{4^5}{5!}\right]$

$= e^{-4} \frac{568}{15}$

$\simeq 0,69$

**Exercice 8.** *Soit $X$ une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. Soient $s > 0$ et $t > 0$. Calculer $\mathbb{P}(X > t + s | X > t)$. Interpréter le résultat obtenu. Cette propriété est appelée l'absence de mémoire de la loi exponentielle.*

$X \sim \mathcal{E}(\lambda)$ $\qquad$ $s, t \in \mathbb{R}_+^*$

densité : $\lambda e^{-\lambda x}$

$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$

$\mathbb{P}(X > t+s \mid X > t)$

$= \frac{\mathbb{P}(X > t+s \cap X > t)}{\mathbb{P}(X > t)}$ $\qquad$ $(\{X > t\} \subset \{X > t+s\})$

$$= \frac{\mathbb{P}(X > t+s)}{\mathbb{P}(X > t)} = \frac{e^{-\lambda(t+s)}}{e^{-\lambda t}} = e^{-\lambda(t+s)} e^{\lambda t} = e^{-\lambda s}$$

↳ Ne dépend pas de $t$ !

$$\mathbb{P}(X > a) = \int_a^{\infty} \lambda e^{-\lambda x} dx = \left[ -e^{-\lambda x} \right]_a^{\infty} = e^{-\lambda a} (-0)$$

**Exercice 9.** *Considérons une variable aléatoire $Z$ de loi normale standard $\mathcal{N}(0,1)$.*

(1) *Calculer:*

(i)$\mathbb{P}(Z \leq 1,96)$, (ii)$\mathbb{P}(Z = 1,96)$, (iii)$\mathbb{P}(Z < 1,96)$, (iv)$\mathbb{P}(Z \leq 5)$, (v)$\mathbb{P}\left(0 \leq Z \leq \frac{1}{3}\right)$,

(vi)$\mathbb{P}(Z \geq 1,35)$, (vii)$\mathbb{P}(Z \leq -3)$, (viii)$\mathbb{P}(|Z| \leq 1)$, (ix)$\mathbb{P}\left(\left|Z - \frac{1}{2}\right| \leq 2\right)$, (x)$\mathbb{P}(3 < Z < 2,7)$

(2) *Déterminer $z$ pour que:*

*a)* $P(Z \leq z) = 0,7995$ ; *b)* $P(|Z| \leq z) = 0,95$ ; *c)* $P(Z \leq z) = 0,25$ .

$Z \rightsquigarrow \mathcal{N}(0,1)$

1)(i) $\mathbb{P}(Z \leqslant 1,96) = 0,975$

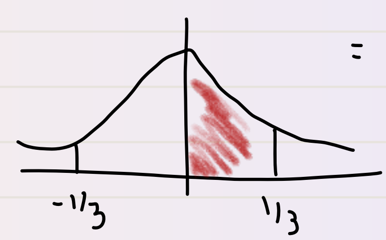
(ii) $\mathbb{P}(Z = 1,96) = 0$

(iii) $\mathbb{P}(Z < 1,96) = 0,975$

(iv) $\mathbb{P}(Z \leqslant 5) = 0,9999$

(v) $\mathbb{P}\left(0 \leqslant Z \leqslant \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{2}\mathbb{P}\left(-\frac{1}{3} \leqslant Z \leqslant \frac{1}{3}\right)$

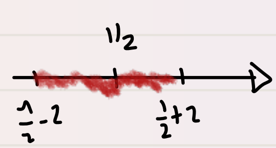
$= \frac{0,2611}{2} = 0,13$




(vi) $\mathbb{P}(Z \geqslant 1,35) = 1 - \mathbb{P}(Z < 1,35) = 1 - 0,91 = 0,09$

(vii) $\mathbb{P}(Z \leqslant -3) = 1,3 \cdot 10^{-3}$

(viii) $\mathbb{P}(|Z| < 1) = \mathbb{P}(-1 < Z < 1) = 0,68$

(ix) $|Z - \frac{1}{2}| \leqslant 2 \iff$  $\iff -1,5 \leqslant Z \leqslant 2,5$


$\mathbb{P}(|Z - \frac{1}{2}| \leqslant 2) = \mathbb{P}(-1,5 \leqslant Z \leqslant 2,5) = \mathbb{P}(Z \leqslant 2,5) - \mathbb{P}(Z \leqslant -1,5)$

$$= 0,9937 - 0,0668 = 0,9269$$

(x) $\mathbb{P}(\underbrace{3 < Z < 2,7}_{\text{impossible}}) = 0$

2) $\mathbb{P}(Z \leq z) = 0,7995 \iff z \approx 0,84$

$\mathbb{P}(|Z| < z) = 0,95 \iff z \simeq 1,96$

$\mathbb{P}(Z \leq z) = 0,25 \iff z \approx -1,96$

**Exercice 10.** *On modélise le hauteur en centimètres des hommes adultes d'un pays par une loi normale* $\mathcal{N}(178; 81)$. *On choisit au hasard un homme parmi les hommes de ce pays. On note* $X$ *la variable aléatoire égale à la hauteur de cet homme en centimètres.*

(1) *Calculer la probabilité que la variable aléatoire* $X$ *soit comprise entre 169 et 187 centimètres.*

(2) *Calculer la probabilité que* $X$ *soit inférieure ou égale à 187 (*$\mathbb{P}(X \leq 187)$*).*

(3) *Calculez la probabilité que* $X$ *soit égale à 178 (*$\mathbb{P}(X = 178)$*).*

1) $\mathbb{P}(169 < X < 187) = \mathbb{P}(X < 187) - \mathbb{P}(X < 169) = 0,5442 - 0,447$

$$= 0,0972$$

2) $\mathbb{P}(X \leq 187) = 0,5442$

3) $\mathbb{P}(X = 178) = 0$

**Exercice 12.** *On admet le fait que la somme de deux variables aléatoires indépendantes de lois de Poisson est une variable aléatoire de loi de Poisson.*
*Quelle est la loi de la somme de deux variables aléatoires indépendantes de lois de Poisson de paramètres respectifs 2 et 3?*

$$\left.\begin{array}{l} X \rightsquigarrow \mathcal{P}(2) \\ Y \rightsquigarrow \mathcal{P}(3) \end{array}\right\} \quad X+Y \rightsquigarrow \mathcal{P}(5) \ldots$$

**Exercice 13.** *Soient $X$ et $Y$ deux variables indépendantes de loi exponentielle de paramètres respectifs $\lambda$ et $\mu$. Montrer que la loi de $\min(X,Y)$ est aussi exponentielle et déterminer son paramètre.*
*(Indication : Calculer $\mathbb{P}(\min(X,Y) > t)$)*

$X \rightsquigarrow \mathcal{E}(\lambda)$

$Y \rightsquigarrow \mathcal{E}(\mu)$

$Z = \min(X,Y)$ $\quad \underline{\text{MQ } Z \rightsquigarrow \mathcal{E}(\Lambda) \ldots}$ $\quad$ ($\Lambda$ à déterminer...)

$$\mathbb{P}(Z > t) = \mathbb{P}(\min(X,Y) > t) = \mathbb{P}(X > t \cap Y > t)$$
$$\overset{(\perp)}{=} \mathbb{P}(X > t) \times \mathbb{P}(Y > t)$$
$$= e^{-\lambda t} \times e^{-\mu t}$$
$$= e^{-(\lambda+\mu)t}$$

Donc (caractérisation de la loi par la fonction de répartiti°) $Z \rightsquigarrow \mathcal{E}(\lambda+\mu)$.

**Exercice 14.** *Soit $X$ et $Y$ deux variables aléatoires indépendantes, $X$ étant de loi normale $\mathcal{N}(-1,3)$ et $Y$ de loi exponentielle de paramètre 2. Calculer $\mathbb{E}[XY]$. Calculer $\mathbb{E}[X^2Y^2]$. En déduire $Var(XY)$.*

$X \perp\!\!\!\perp Y$

$X \rightsquigarrow \mathcal{N}(-1\,;\,3)$

$Y \rightsquigarrow \mathcal{E}(2)$

$$\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\,\mathbb{E}(Y) = (-1) \times \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$\mathbb{E}(X^2Y^2) = \mathbb{E}(X^2) . \mathbb{E}(Y^2) \qquad \left(\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2\right.$$

$$= \left(\mathrm{Var}(X) + (\mathbb{E}(X))^2\right)\left(\mathrm{Var}(Y) - \mathbb{E}(Y)^2\right)$$

$$= \left(3 + (-1)^2\right)\left(\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2\right)$$

$$= (4)\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$= 2$$

$$\mathrm{Var}(XY) = \mathbb{E}((XY)^2) - [\mathbb{E}(XY)]^2$$

$$= \mathbb{E}(X^2Y^2) - (\mathbb{E}(XY))^2$$

$$= 2 - \left(-\frac{1}{2}\right)^2$$

$$= 2 - \frac{1}{4}$$

$$= 1,75$$