1. (⋆) Pour chacune des fonctions définies ci-dessous, préciser l'ensemble sur lequel la fonction est définie, celui sur lequel la fonction est dérivable puis déterminer la fonction dérivée.

$$f_1(x) = \frac{x}{2}\Big(\sin(\ln x) - \cos(\ln x)\Big) \qquad f_2(x) = \exp\left(\frac{-1}{x^2+1}\right) \qquad f_3(x) = \ln\frac{\sqrt{x^2+2}-1}{\sqrt{x^2+2}+1}$$

$$f_4(x) = x^{\frac{1}{x}} \qquad f_5(x) = \arcsin(x^2-1) \qquad f_6(x) = \arctan\left(\frac{x+1}{1-x}\right).$$

TD 4, Ex 1

$$f_1(x) = \frac{x}{2}\left(\sin(\ln(x)) - \cos(\ln(x)) \right)$$

$$\mathcal{D}(f_1) = \mathbb{R}_+^*$$

$$\mathcal{D}(f_1') = \mathbb{R}_+^*$$

$$f_1'(x) = \frac{1}{2}\left[\sin(\ln x) - \cos(\ln(x)) + x\left(\frac{1}{x}\cos(\ln(x)) + \frac{1}{x}\sin(\ln(x)) \right) \right]$$

$$= \sin(\ln x)$$

$$f_2(x) = e^{-\frac{1}{x^2+1}} \qquad \mathcal{D}(f_2) = \mathbb{R} \qquad \mathcal{D}(f_2') = \mathbb{R}$$

$$f_2'(x) = \left(-\frac{1}{x^2+1}\right)' e^{-\frac{1}{x^2+1}} = -2x \times \left(-\frac{1}{(x^2+1)^2}\right) \times e^{-\frac{1}{x^2+1}}$$

$$= \frac{2x}{(x^2+1)^2} e^{-\frac{1}{x^2+1}}$$

$$f_3(x) = \ln\left(\frac{\sqrt{x^2+2} - 1}{\sqrt{x^2+2} + 1} \right)$$

On a $\sqrt{x^2+2} \geq \sqrt{2} > 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

D'où $\sqrt{x^2+2} \pm 1 > 0$

D'où $\mathcal{D}(f_3) = \mathbb{R}$

Et comme $\sqrt{\cdot}$ est dérivable sur $[2; +\infty)$, $\mathcal{D}(f_3') = \mathbb{R}$ et

$$f_3'(x) = \frac{\left(\frac{\sqrt{x^2+2} - 1}{\sqrt{x^2+2} + 1} \right)'}{\frac{\sqrt{x^2+2} - 1}{\sqrt{x^2+2} + 1}} = \frac{\sqrt{x^2+2} + 1}{\sqrt{x^2+2} - 1} \times \frac{2x \times \frac{1}{2\sqrt{x^2+2}} \times \left(\sqrt{x^2+2} + 1\right) - 2x \times \frac{1}{2\sqrt{x^2+2}} \times \left(\sqrt{x^2+2} - 1\right)}{\left(\sqrt{x^2+2} + 1\right)^2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x^2+2} - 1} \times \frac{1}{\sqrt{x^2+2} + 1} \times \frac{x}{\sqrt{x^2+2}} \left(\sqrt{x^2+2} + 1 - \sqrt{x^2+2} + 1 \right)$$

... Ex 1

$$f_3'(x) = \frac{1}{x^2+2-1} \times \frac{2x}{\sqrt{x^2+2}} = \frac{2x}{(x^2+1)\sqrt{x^2+2}}$$

$$f_4(x) = x^{1/x} = \exp\left(\frac{1}{x}\ln(x)\right)$$

$$\mathcal{D}(f_4) = \mathbb{R}_+^*$$

$$\mathcal{D}(f_4') = \mathbb{R}_+^*$$

$$f_4'(x) = \left(\frac{1}{x}\ln(x)\right)' \exp\left(\frac{1}{x}\ln(x)\right)$$

$$= \left(\frac{\ln(x)}{x}\right)' \exp\left(\frac{1}{x}\ln(x)\right)$$

$$= \frac{\frac{1}{x}\times x - \ln x}{x^2} \exp\left(\frac{1}{x}\ln(x)\right)$$

$$= \frac{1-\ln(x)}{x^2} \times x^{1/x} = (1-\ln(x))\, x^{\frac{1}{x}-2}.$$

$$f_5(x) = \arcsin(x^2-1)$$

$$\mathcal{D}(\arcsin) = [-1;1] \qquad \mathcal{D}(\underbrace{\arcsin'}_{=\frac{1}{\sqrt{1-\cdot^2}}}) = (-1;1)$$

On a $\left[x^2-1 \in [-1;1]\right] \Leftrightarrow \left[x \in [-\sqrt{2}; +\sqrt{2}]\right]$

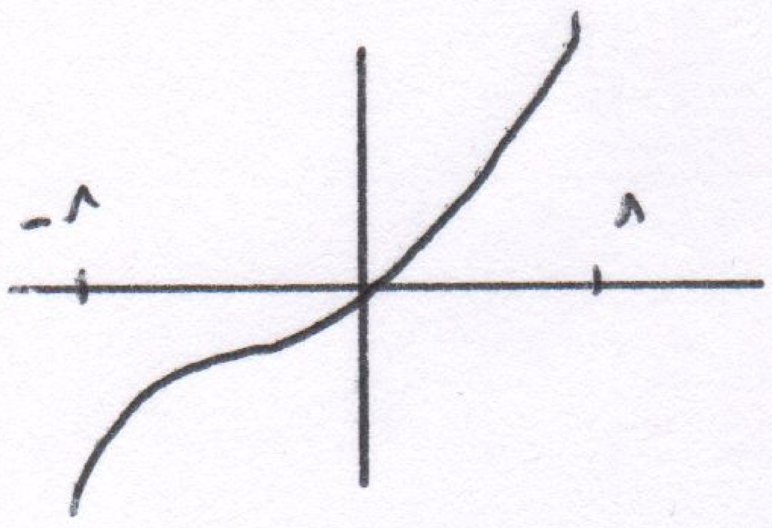
D'où $\mathcal{D}(f_5) = [-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$

$$\cancel{\mathcal{D}(f_5') = (-\sqrt{2}; \sqrt{2})}$$

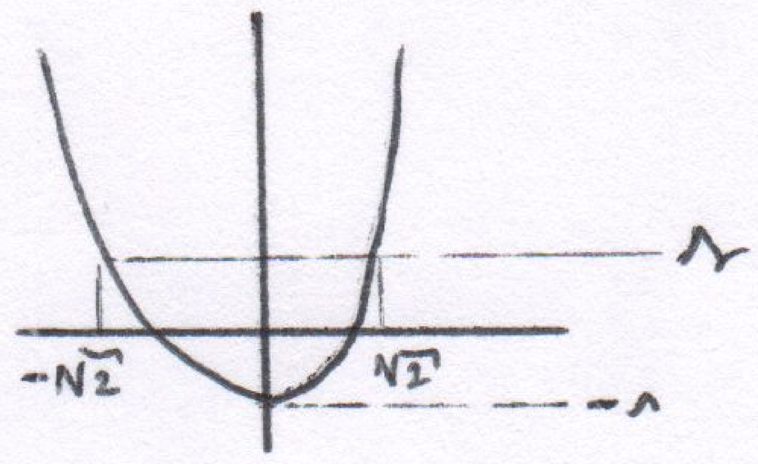
$$f_5'(x) = 2x \times \frac{1}{\sqrt{1-(x^2-1)^2}} = \frac{2x}{\sqrt{-x^4+2x^2}} = \frac{2}{\sqrt{2-x^2}}$$

Ex 1

$$f_5(x) = \arcsin(x^2-1)$$



ARCSIN



x^2-1

| Défini sur $[-1;1]$

| Dérivable sur $(-1;1)$

On a $D(f_5) = [-\sqrt{2};\sqrt{2}]$

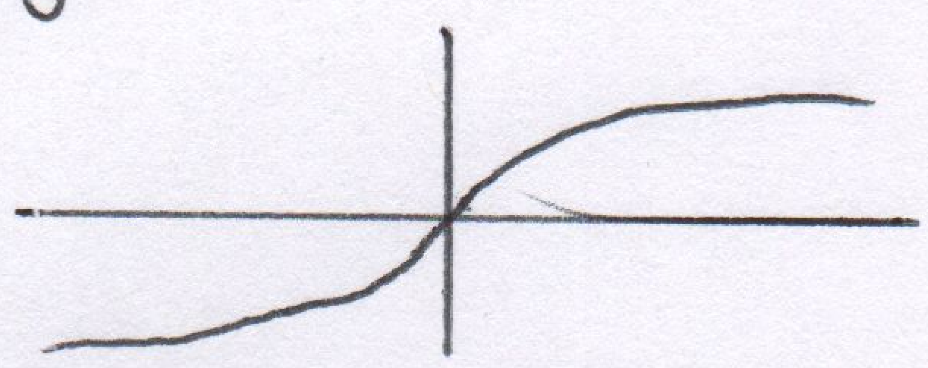
et $D(f_5') = (-\sqrt{2};\sqrt{2}) \setminus \{0\}$

$$\frac{d(\arcsin)}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Et pour $x \in D(f_5')$,

$$f_5'(x) = 2x \times \frac{1}{\sqrt{1-(x^2-1)^2}} = \frac{2x}{\sqrt{2x^2-x^4}} = \frac{2}{\sqrt{2-x^2}}$$

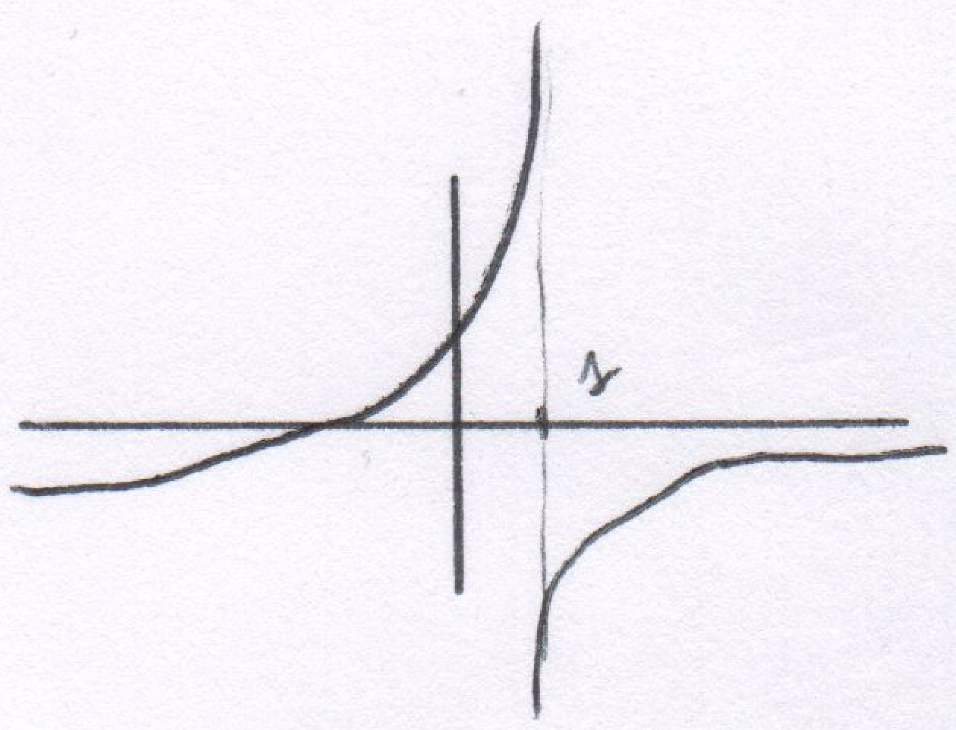
$$f_6(x) = \arctan\left(\frac{x+1}{1-x}\right)$$



ARCTAN

| Définie sur $\mathbb{R}$

| Dérivable sur $\mathbb{R}$



$\frac{x+1}{1-x}$

| Défini et dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$

$$\frac{d(\arctan)}{dx} = \frac{1}{1+x^2}$$

D'où $D(f_6) = D(f_6') = \mathbb{R}\setminus\{1\}$

et $f_6'(x) = \frac{(1-x)+(x+1)}{(1-x)^2} \times \frac{1}{1+\left(\frac{x+1}{1-x}\right)^2} = \frac{2}{(1-x)^2+(1+x)^2} = \frac{1}{1+x^2}$

2. ($\star$) On considère les fonctions $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ et $g : [-1,1] \to \mathbb{R}$ définies par :

$$f(x) = \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) \qquad\qquad g(x) = \arcsin(x) + \arccos(x)\,.$$

(a) Étudier les dérivées des fonctions f et g sur leur ensemble de définition.

(b) En déduire les formules suivantes :

$$\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \begin{cases} -\dfrac{\pi}{2} & \text{si} \quad x < 0\,, \\ \dfrac{\pi}{2} & \text{si} \quad x > 0\,. \end{cases}$$

$$\arcsin(x) + \arccos(x) = \frac{\pi}{2} \quad \text{pour tout } x \in [-1,1]\,.$$

TD4, Ex 2

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^* \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) \end{cases}$$

$$g : \begin{cases} [-1;1] \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \arcsin(x) + \arccos(x) \end{cases}$$

a) Soit $x \in \mathbb{R}^*$,

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{-1}{x^2} \times \frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2+1} = 0$$

$$g'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 0$$

Ainsi, f et g sont constantes sur chacune des composantes connexes de leur ensemble de définition:

b) On a :

$$f(1) = \arctan(1) + \arctan(1) = 2 \times \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

$$f(-1) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{car } f \text{ impaire}}}{=} -f(1) = -\frac{\pi}{2}$$

Ainsi $f(x) = \begin{cases} -\pi/2 & \text{si } x < 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{si } x > 0 \end{cases}$

$$g(0) = \arcsin(0) + \arccos(0) = 0 + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}.$$

3. **($\star$)** Soit f la fonction définie pour $x \in D = [-1,0[\cup]0,+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}$.

(a) Montrer que f admet un prolongement par continuité $\tilde{f}$ à $[-1,+\infty[$.

(b) Montrer que $\tilde{f}$ est dérivable en 0 et calculer $\tilde{f}'(0)$.

(c) $\tilde{f}$ est-elle de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-1,+\infty[$?

TD 4, Ex 3

$$f : \begin{cases} D = [-1;0[\cup]0;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x} \end{cases}$$

a) Dans la fiche TD 3, Ex 4, on a vu que

$$\sqrt{1+x}-1 \underset{0}{\sim} \frac{x}{2}$$

D'où $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x} = 1/2$

Donc on peut prologer f en 0 en posant $f(0) = 1/2$.

On note $\tilde{f}$ ce prolongement de f.

---

b) On écrit le taux d'accroissement en $x=0$:

$$\underset{\text{« tau »}}{\tau(h)} = \frac{\tilde{f}(0+h)-\tilde{f}(0)}{h} = \frac{\dfrac{\sqrt{1+h}-1}{h} - \dfrac{1}{2}}{h}$$

$$= \frac{\sqrt{1+h}-1}{h^2} - \frac{1}{2h} = \frac{2\sqrt{1+h}-2-h}{2h^2} = \frac{2\sqrt{1+h}-(2+h)}{2h^2}$$

$$= \frac{4(1+h)-(2+h)^2}{2h^2(2\sqrt{1+h}+(2+h))} = \frac{\cancel{4}+\cancel{4h}-\cancel{4}-\cancel{4h}-h^2}{2h^2(2\sqrt{1+h}+2+h)} = \frac{-h^2}{2h^2(2\sqrt{1+h}+2+h)}$$

$$= -\frac{1}{4\sqrt{1+h}+4+h} \xrightarrow{h \to 0} -\frac{1}{8}$$

Ainsi, $\tilde{f}'(0) = -\frac{1}{8}$

... Ex 3

c) Soit $x \in (-1;+\infty) \setminus \{0\}$.

Alors $\tilde{f}'(x) = f'(x) = \dfrac{\frac{x}{2\sqrt{1+x}} - \sqrt{1+x} + 1}{x^2}$

$$= \frac{x - 2(1+x) + 2\sqrt{1+x}}{2\sqrt{1+x}\, x^2}$$

$$= \frac{x - 2 - 2x + 2\sqrt{1+x}}{2\sqrt{1+x}\, x^2} = \frac{2\sqrt{1+x} - 2 - x}{2\sqrt{1+x}\, x^2}$$

$$= \frac{\sqrt{1+x} - 1 - \frac{x}{2}}{\sqrt{1+x}\, x^2} = \frac{\sqrt{1+x} - (1+\frac{x}{2})}{\sqrt{1+x}\, x^2}$$

$$= \frac{1+x - (1+x/2)^2}{x^2\sqrt{1+x}\,(\sqrt{1+x} + (1+\frac{x}{2}))}$$

$$= \frac{1 + x - 1 - x - \frac{x^2}{4}}{x^2\sqrt{1+x}\,(1+\frac{x}{2} + \sqrt{1+x})} = \frac{-x^2/4}{x^2\sqrt{1+x}\,(1+\frac{x}{2}+\sqrt{1+x})}$$

$$= \frac{-1/4}{\sqrt{1+x}\,(1+\frac{x}{2} + \sqrt{1+x})} = -\frac{1}{4}\,\frac{1}{\underbrace{\sqrt{1+x} + \frac{x\sqrt{1+x}}{2} + 1 + x}_{\to\, 2}} \longrightarrow -\frac{1}{8}$$

Ainsi, $\lim\limits_{x \to 0} \tilde{f}'(x) = -\frac{1}{8} = \tilde{f}'(0)$

D'où $\tilde{f}'$ est continue en $x=0$ d'où $\tilde{f} \in \mathcal{C}^1((-1;+\infty))$.

4. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable telle que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$. Montrer qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $f'(c) = 0$.

TD 4, Ex 4

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

f dérivable

$\lim\limits_{+\infty} f = +\infty \qquad \lim\limits_{-\infty} f = +\infty$

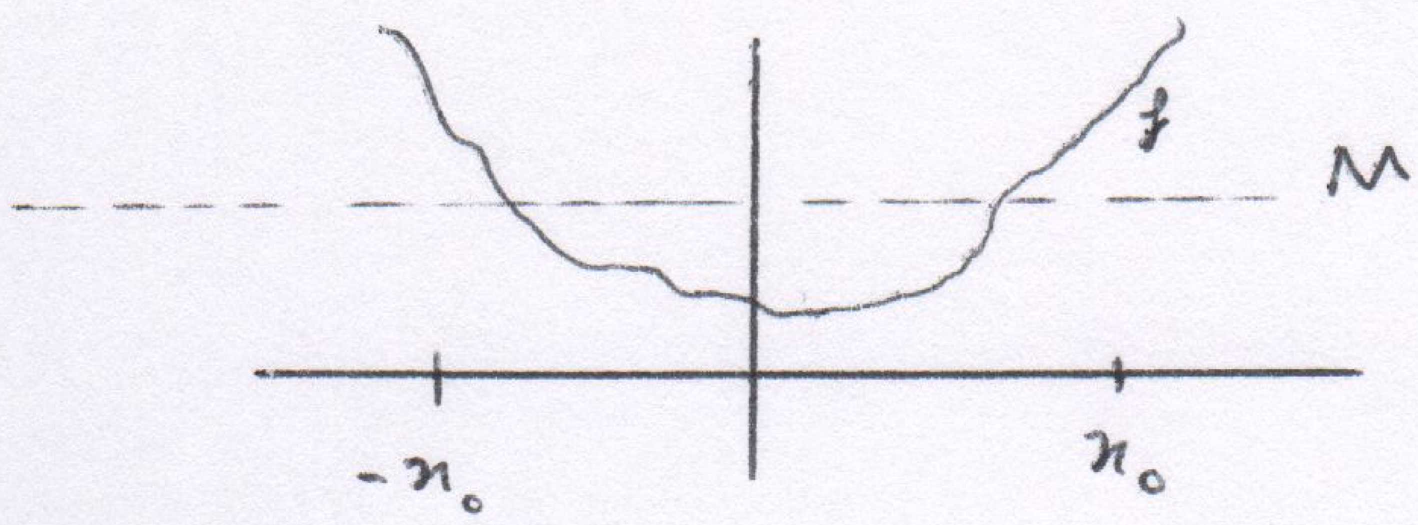
MQ $\exists c \in \mathbb{R} \,/\, f'(c) = 0$

THÉORÈME (Rolle) : Soient $a, b \in \mathbb{R} \,/\, a < b$ et $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ continue sur $[a;b]$, et dérivable sur $(a;b)$ et tq $f(a) = f(b)$.

Alors $\exists c \in]a;b[\,/\, f'(c) = 0$

Comme $\lim\limits_{\pm\infty} f = +\infty$, $\forall M > 0$, $\exists x_0 \in \mathbb{R}_+ \,/$

$\forall x \in \mathbb{R}$ avec $|x| > x_0$, $f(x) > M$



Pour $M > 0$ suffisamment grand, on a $M > f(0)$

↳ Comme $f(x) > M$ pour $x < -x_0$ alors par le TVI,

$\exists \alpha \in [-x_0 ; 0) \,/\, f(\alpha) = M$

↳ De même, comme $f(x) > M$ pour $x > x_0$, par le TVI,

$\exists \beta \in (0 ; +x_0] \,/\, f(\beta) = M$

Ainsi, $f(\alpha) = f(\beta)$ d'où par le théorème de Rolle, $\exists c \in (\alpha, \beta) \subset [-x_0, x_0]$ tel que $f'(c) = 0$.

5. **($\star$)** Pour $\alpha > 0$, on considère la fonction $f :]0,1] \to \mathbb{R}$, définie par $f(x) = x^\alpha \ln x$. Montrer que $\min_{x \in]0,1]} f(x)$ et $\max_{x \in]0,1]} f(x)$ existent et les calculer.

TD 4, Ex 5 :

Pour $\alpha > 0$, $f : \begin{cases}]0,1] \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto x^{\alpha} \ln(x) \end{cases}$

Soit $x \in]0;1]$.

$$f'(x) = \alpha x^{\alpha-1} \ln(x) + \frac{x^{\alpha}}{x}$$

$$= x^{\alpha-1} \left[\alpha \ln(x) + 1 \right]$$

$$\left[f'(x) > 0 \right] \Leftrightarrow \left[\alpha \ln(x) + 1 > 0 \right] \Leftrightarrow \left[\alpha \ln x > -1 \right]$$

$$\Leftrightarrow \left[\ln x > -1/\alpha \right] \Leftrightarrow \left[x > e^{-1/\alpha} \right]$$

Or $-\frac{1}{\alpha} < 0$ d'où $0 < e^{-1/\alpha} \leq 1$

et donc

x	0		$e^{-1/\alpha}$		1
f'	||	$-$	0	$+$	
f	|| 0	$\searrow$	$-\frac{1}{\alpha e}$	$\nearrow$	0

↳ $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} x^{\alpha} \ln(x) = \frac{1}{\alpha} \lim\limits_{x \to 0} x^{\alpha} \ln(x^{\alpha}) \longrightarrow 0$

↳ $f(1) = 0$ ↳ $f\left(e^{-1/\alpha}\right) = \exp\left(\alpha \ln e^{-1/\alpha}\right) \times \ln\left(e^{-1/\alpha}\right)$

$$= \exp(-1) \times -\frac{1}{\alpha} = -\frac{1}{\alpha e}$$

Ainsi, $\min\limits_{]0;1]} f = -\frac{1}{\alpha e}$

$\max\limits_{]0;1]} f = 0.$

6. ($\star$) Montrer que la fonction $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{e^x}{x+2}$ admet un unique point fixe sur l'intervalle $[0,1]$.

TD 4, Ex 6

$$f : \begin{cases} [0;1] \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \dfrac{e^x}{x+2} \end{cases}$$

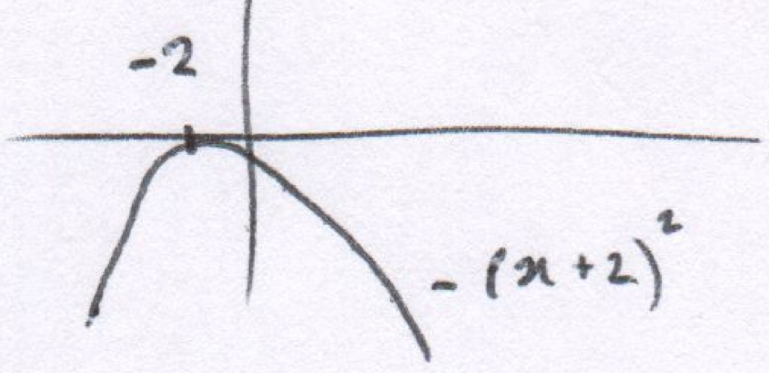
On pose $g(x) = f(x) - x$

Alors $g'(x) = \dfrac{e^x(x+2-1)}{(x+2)^2} - 1 = \dfrac{e^x(x+1) - (x+2)^2}{(x+2)^2}$

↳ Pour $0 \leq x \leq 1/2$, on a

$$\left| \begin{array}{l} 1 \leq 1+x \leq 3/2 \\ 1 \leq e^x \leq \sqrt{e} \end{array} \right. \quad \text{d'où} \quad 1 \leq e^x(x+1) \leq \frac{3}{2}\sqrt{e}$$

$$-4 = -(0-2)^2 \overset{\circledast}{\geq} \underbrace{-(x+2)^2} \overset{\circledast}{\geq} -\left(\tfrac{1}{2}+2\right)^2 = -\left(\tfrac{5}{2}\right)^2 > -7$$



⊛ Par décroissance de $-(\circ+2)^2$ sur $[0,1]$.

D'où, par somme, $-7 \leq e^x(x+1) - (x+2)^2 \leq -6\sqrt{e} < 0$

↳ Pour $\frac{1}{2} \leq x \leq 1$, on a

$$\left| \begin{array}{l} \frac{3}{2} \leq x+1 \leq 2 \\ \sqrt{e} \leq e^x \leq e \end{array} \right. \quad \text{d'où} \quad \frac{3}{2}\sqrt{e} \leq e^x(x+1) \leq 2e$$

$$-\left(\tfrac{5}{2}\right)^2 = -\left(\tfrac{1}{2}+2\right)^2 \overset{\circledast}{\geq} -(x+2)^2 \overset{\circledast}{\geq} -(1+2)^2 = -9$$

d'où, par somme, $\frac{3}{2}\sqrt{e} - 9 \leq e^x(x+1) - (x+2)^2 \leq 2e - \left(\frac{5}{2}\right)^2 < 0$

... Ex 6 :

Ainsi, dans tous les cas, on trouve

$$e^x(x+1)-(x+2)^2 < 0.$$

Par conséquent, $g'(x) < 0 \quad \forall x \in [0;1]$,

ie. g est strictement $\searrow$ sur $[0;1]$.

On a $g(0) = \dfrac{e^0}{2} - 0 = \dfrac{1}{2} > 0$

$g(1) = \dfrac{e}{3} - 1 = \dfrac{e-3}{2} < 0$

D'où, par application du TVI (puisque g est bien continue puisque dérivable sur $[0;1]$), on trouve :

$\exists!\, \alpha \in (0;1) \,/\, g(\alpha) = 0$; ie.

$\exists!\, \alpha \in (0;1) \,/\, f(\alpha) = \alpha$ ie.

f possède un unique point fixe dans $(0;1)$.

7. **($\star$)** Montrer les inégaliés suivantes :

(a) $1 + x < e^x < 1 + xe^x$ pour tout $x > 0$.

(b) $\sin x < x$ pour tout $x > 0$.

TD4, Ex 7 :

a) $f(x) = e^x - x - 1$

$f'(x) = e^x - 1 \quad [f'(x) > 0] \Leftrightarrow [e^x > 1]$

$\Leftrightarrow [x > 0]$

Donc $\forall x > 0$, $f'(x) > 0$ d'où f est croissante strictement sur $\mathbb{R}_+^*$.

On a $f(0) = 1 - 1 = 0$

D'où $\forall x > 0$, $f(x) > 0$, ie $e^x > x + 1$.

$g(x) = 1 + xe^x - e^x = 1 + e^x(x - 1)$

$g'(x) = e^x(x - 1 + 1) = xe^x$

D'où $g'(x) > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}_+^*$ ie g est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

Or a $g(0) = 0$ donc $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $g(x) > 0$, ie

$\forall x > 0$, $e^x < 1 + xe^x$.

---

b) MQ $\sin(x) < x \quad \forall x > 0$.

↳ Si $x > \pi$, alors on a $\sin(x) < 1 < \pi < x$.

↳ Si $x \in (0 ; \pi)$, on pose $h(x) = \sin(x) - x$

Alors $h'(x) = \cos(x) - 1$ et on a $[h'(x) > 0] \Leftrightarrow \underbrace{[\cos(x) > 1]}_{\text{ce qui n'est jamais vrai !}}$

... Ex 7 :

Ainsi, h est décroissante.

Mieux : $[0 < x \leq \pi] \Rightarrow [-1 \leq \cos(x) < 1]$

$\Rightarrow [\cos(x) - 1 < 0]$

On a donc décroissance stricte de h.

$h(0) = 0 - 0 = 0$

D'où $\forall x \in (0 ; \pi]$, $h(x) < 0$, ie $\sin(x) < x$.

Ainsi, $\forall x > 0$, on a $\sin(x) < x$.

8. ($\star$) Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert, $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction et $L \geq 0$ une constante.

(a) **(Fonctions lipschitziennes).** On suppose que f est dérivable sur I. Montrer que f est une fonction L-lipschitzienne, c'est-à-dire qu'elle satisfait la propriété

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y| \quad \forall (x, y) \in I^2,$$

si et seulement si $|f'(x)| \leq L$ pour tout $x \in I$.

(b) On suppose qu'il existe $\alpha > 1$ tel que

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|^\alpha \quad \forall (x, y) \in I^2.$$

Montrer que la fonction f est constante.

TD4, Ex 8

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ où $I \subset \mathbb{R}$ est un intervalle ouvert.

Soit $L \geqslant 0$ une constante.

a) (Fonctions lipschitziennes)

On suppose f dérivable sur I.

MQ $\left[f \text{ est } L\text{-lipschitzienne} \right] \iff \left[|f'(x)| \leq L \quad \forall x \in I \right]$

$\boxed{\Rightarrow}$ Supposons f est L-lipschitzienne.

Alors $\forall x, y \in I, \quad |f(x) - f(y)| \leq L |x - y|$

D'où, pour $x \neq y$, $\quad \underbrace{\left| \dfrac{f(x) - f(y)}{x - y} \right|}_{\substack{\Big\downarrow\, y \to x \\ |f'(x)|}} \leq L$

Ainsi $\forall x \in I, \quad |f'(x)| \leq L$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Supposons que $|f'(x)| \leqslant L \quad \forall x \in I$.

THÉORÈME (Accroissements finis) (TAF)

Soit $\varphi : [a;b] \to \mathbb{R}$ avec $a<b$.

On suppose φ continue sur $[a;b]$ et dérivable sur $(a;b)$.

Alors $\exists c \in (a;b) / \dfrac{\varphi(b)-\varphi(a)}{b-a} = \varphi'(c)$

Soient $x, y \in I$, avec $x<y$ on a $f_{|[x,y]}$ (la restriction de f à l'intervalle $[x,y]$) vérifie les conditions du TAF.

On a donc $c \in (x,y)$ tq

$$\frac{f(x)-f(y)}{x-y} = f'(c)$$

d'où $\left| \dfrac{f(x)-f(y)}{x-y} \right| = |f'(c)| < L$

d'où $|f(x)-f(y)| \leqslant L|x-y|$ $(*)$

Remarque: $x<y$ n'est pas contraignant puisque si $y<x$, il suffit d'inverser x et y ; et si $x=y$ l'inégalité $(*)$ est trivialement vérifiée $(0 \leqslant 0)$

Ainsi $\forall x,y \in I$, $|f(x)-f(y)| \leqslant L|x-y|$ ie f est lipschitzienne.

L'équivalence est donc établie.

b) (Fonctions Höldériennes)

On suppose qu' $\exists \alpha > 1$ /

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x-y|^{\alpha} \quad \forall x, y \in I.$$

MQ f est constante.

On a, pour $x \neq y$,

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x-y| \times |x-y|^{\alpha-1} \qquad (\text{Note : } \alpha - 1 > 0)$$

d'où $$\frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|} \leq L|x-y|^{\alpha-1}$$

ie $$0 \leq \left| \frac{f(x)-f(y)}{x-y} \right| \leq L|x-y|^{\alpha-1}$$

$$\left| \frac{f(x)-f(y)}{x-y} \right| \xrightarrow[y \to x]{} |f'(x)| \qquad L|x-y|^{\alpha-1} \xrightarrow[y \to x]{} 0$$

Ainsi, ~~par le théorème des gendarmes~~

$$|f'(x)| = 0 \quad \text{ie} \quad f'(x) = 0 \quad (\forall x \in I)$$

ie f est constante sur I.

9. Soit $f : [0,1] \mapsto \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 vérifiant $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$. Démontrer que pour tout $n \geq 1$, il existe $0 < x_1 < x_2 < ... < x_n < 1$ vérifiant $f'(x_1) + ... + f'(x_n) = n$.

TD ~~2~~ 1, Ex 9

Soit $f \in \mathcal{C}^1([0;1] \to \mathbb{R})$ tq $f(0)=0$ $f(1)=1$

MQ $\forall n \in \mathbb{N}, \exists\, 0 < x_1 < \cdots < x_n /$

$$f'(x_1) + \cdots + f'(x_n) = n$$

Note : L'ordre $x_1 < x_2 \cdots < x_n$ n'importe pas puisqu'il n'influence pas la somme. On est donc libre de trouver $x_1, \cdots, x_n$ comme on veut, quitte à ensuite les remettre dans l'ordre...

On pose $g(x) = f(x) - x$

Alors $g'(x) = f'(x) - 1$, $g(0) = 0$ $g(1) = 0$

et le problème revient à trouver $x_1, \cdots, x_n$ tq

$$\sum_{i=1}^{n} g'(x_i) = 0.$$

$\hookrightarrow$ Si $g \equiv 0$ ie $f(x) \equiv x$, alors $g'(x) \equiv 0$

Et on peut prendre $x_k = 1 - \frac{1}{2k}$ pour $k \in [\![1; n]\!]$.

$\hookrightarrow$ Si $g \not\equiv 0$ alors $\exists\, a \in (0;1) / g(a) \neq 0$ d'où par le TAF,

$$\frac{g(a) - g(0)}{a - 0} = \frac{g(a)}{a} = g'(\tilde{a}) \text{ du signe de } g(a)$$

$$\frac{g(1) - g(a)}{1 - a} = -\frac{g(a)}{1-a} = g'(\tilde{\tilde{a}}) \text{ du signe opposé de } g(a)$$

Ainsi, par le TVI, $\exists M>0 / \forall b \in [-M;M], \exists \beta \in [0;1] /$

$$g'(\beta) = b$$

ie $[-M;M] \subset g'([0;1])$

(*) (ie Tout élément de $[-M;M]$ possède au moins un antécédent par g'.

On construit à présent les éléments $(x_1, \dots, x_n)$ par récurrence comme suit :

(Par le Théorème de Rolle, on sait qu'il existe $\alpha \in [0;1]$ tq $g'(\alpha) = 0$)

↳ Pour $n=1$, on pose $x_1 = \alpha$

↳ Pour $n>1$,

↳ Si n est pair, alors on retire α de la liste $(x_1, \dots, x_{n-1})$; il faut à présent ajouter deux éléments :

x_{n-1} = un antécédent de $-\dfrac{M}{2n}$ par g'
x_n = un antécédent de $+\dfrac{M}{2n}$ par g'
) Existent d'après (*)

Ainsi, les nouveaux x_{n-1} et x_n sont différents de tous les autres et $g'(x_{n-1}) + g'(x_n) = 0$.

↳ Si n est impair, comme $n-1$ est pair, $\alpha \notin \{x_1; \dots; x_{n-1}\}$

Donc on peut poser $x_n = \alpha$. (On peut enfin trier les $(x_1, \dots, x_n)$ pour les mettre dans l'ordre croissant.)

... Ex 9

On a ainsi MQ $\forall n \geq 1$,

$\exists (x_1 ; \dots ; x_n) \in [0;1]^n /$

$$\sum_{i=1}^{n} g'(x_i) = 0$$

ie $\sum_{i=1}^{n} f'(x_i) = n$.

10. (⋆) Calculer les dérivées d'ordre n, pour $n \in \mathbb{N}$, des fonctions suivantes :

$$f(x) = x^2(1+x)^n \qquad\qquad g(x) = (x^2+1)e^x.$$

TD4, Ex 10

$$f(x) = x^2(1+x)^n$$
$$= x^2 \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$$
$$= \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{k+2}}$$

En dérivant n fois, il ne va Rester plus que les contributions de x^n ; x^{n+1} et x^{n+2}

(puisque $\forall p > q$, $\frac{d^p(x^q)}{dx^p} = 0$)

Ainsi, $$\frac{d^n(f)}{dx^n}(x) = \frac{d^n}{dx^n}\left(\binom{n}{n-2} x^n + \binom{n}{n-1} x^{n+1} + \underbrace{\binom{n}{n}}_{=1} x^{n+2}\right)$$

$$= n\binom{n}{n-2} x^{n-1} + (n+1)\binom{n}{n-1} x^n + (n+2) x^{n+1}$$

$$g(x) = (x^2+1)e^x$$
$$g'(x) = e^x(x^2+1+2x) = g(x) + e^x(2x)$$
$$g''(x) = e^x(x^2+2x+1+2x+2) = g'(x) + e^x(2x+2)$$
$$g'''(x) = e^x(x^2+2x+1+2x+2+(2x+4)) = g''(x) + e^x(2x+4)$$

Guess : $H(n)$: " $\frac{d^n(g)}{dx^n}(x) = e^x\left(x^2+1+2\sum_{k=1}^{n}(x+(k-1))\right)$ "

(I) Pour $n=1$, c'est ok

... Ex 10 :

(H) Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $\mathcal{H}(n)$ vraie.

Alors
$$\frac{d^{n+1}(g)}{dx^{n+1}}(x) = e^{x}\left(x^2+1+2\sum_{k=1}^{n}(x+(k-1)) + \underbrace{2\sum_{k=1}^{n}(1)}_{=2n} + 2x\right)$$

$$= e^{x}\left(x^2+1+2\sum_{k=1}^{n+1} x+(k-1)\right)$$

Donc $\mathcal{H}(n+1)$ vraie.

(C) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{H}(n)$ est vraie.

↳ Donnons une forme plus jolie à $\frac{d^n(g)}{dx^n}$:

$$\frac{d^n(g)}{dx^n} = e^{x}\left(x^2+1+2nx+2\sum_{k=1}^{n}(k-1)\right)$$

$$= e^{x}\left(x^2+1+2nx+2\frac{(n-1)n}{2}\right)$$

$$= e^{x}\left(x^2+2nx+1+n(n-1)\right)$$

11. Soit $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 sur $\mathbb{R}$. On suppose que f s'annule en trois points distincts a, b, c, avec $a < b < c$.

(a) Montrer qu'il existe deux réels d et e, avec $d \in]a, b[$, $e \in]b, c[$ et $f'(d) = f'(e) = 0$.

(b) Montrer que f'' s'annule en au moins un point de $\mathbb{R}$.

TD4, Ex 11

Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R} \to \mathbb{R})$, on suppose qu'$\exists\, a<b<c$ /

$f(a) = f(b) = f(c) = 0.$

a) Application directe du théorème de Rolle:

$\exists\, d \in (a;b)$
$\exists\, e \in (b;c)$ tq $f'(d) = f'(e) = 0.$

---

b) Application directe du théorème de Rolle :

$\exists\, \alpha \in (d;e)$ tq $f''(\alpha) = 0.$

12. **($\star$)** Soient $n \geq 1$ un entier naturel et $g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ une fonction de classe C^n sur $\mathbb{R}$. On suppose que g s'annule en $n+1$ points distincts $a_1 < ..... < a_{n+1}$. Montrer que la dérivée n-ème $g^{(n)}$ s'annule au moins une fois sur $\mathbb{R}$.

TD4, Ex 12

Soient $n \in \mathbb{N}^*$

$g \in \mathcal{C}^n(\mathbb{R} \to \mathbb{R})$

On suppose que g s'annule $n+1$ fois en $n+1$ points distincts $a_1 < \dots < a_{n+1}$.

MQ $g^{(n)}$ s'annule au moins une fois sur $\mathbb{R}$.

C'est une généralisation de l'exercice précédent. Pour $k \in [\![1;n]\!]$,

$\mathcal{P}(k)$: « $g^{(k)}$ s'annule au moins $n-k+1$ fois sur $\mathbb{R}$ »

(I) Pour $k=1$, on applique n fois le théorème de Rolle sur $(a_1; a_2), (a_2, a_3), \dots, (a_n, a_{n+1})$ pour trouver $n = n-1+1$ points d'annulation de g'.

(H) Soit $k \in [\![1; n-1]\!]$, supposons $\mathcal{P}(k)$ vraie.

Notons $b_1 < b_2 < \dots < b_{n-k+1}$ des points d'annulation de $g^{(k)}$. On applique $n-k$ fois le th. de Rolle sur $(b_1, b_2), (b_2, b_3), \dots, (b_{n-k}, b_{n-k+1})$ pour trouver $n-k = n-(k+1)+1$ points d'annulation de $g^{(k+1)}$.

(C) On pousse le raisonnement jusqu'à n et on trouve $g^{(n)}$ s'annule au moins une fois sur $\mathbb{R}$.

13. Soit P un polynôme de degré n à coefficients réels qui possède n racines réelles distinctes. Montrer que P' admet $n-1$ racines distinctes.

TD4, Ex 13

Soit P un polynôme de degré $n \in \mathbb{N}^*$ admettant n racines distinctes.

MQ P' admet exactement $n-1$ racines distinctes.

Notons $r \in \mathbb{N}$ le nb de racines de P'

↳ P est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ car c'est un polynôme.

D'après l'ex 12, P' s'annule au moins $n-1$ fois sur $\mathbb{R}$.

Donc $r \geq n-1$

↳ P' est de degré $n-1$ donc $r \leq n-1$

Donc $r = n-1$ exactement.

14. ($\star$) Rappeler la règle de L'Hôpital et l'appliquer pour déterminer les limites suivantes.

(a) La limite quand x tend vers -2 de $f(x) = \dfrac{x^3+2x^2-x-2}{x^2-4}$.

(b) La limite quand x tend vers 2 de $f(x) = \dfrac{\sqrt{2x^2+1}-3}{x^2-4}$.

(c) La limite quand x tend vers 0 de $f(x) = \dfrac{\ln(1+x)-x}{x^2}$.

TD4, Ex 14 (L'Hôpital)

Règle de l'Hôpital :

Soient $f, g : [a ; b[\to \mathbb{R}$ dérivables en a et tq

$f(a) = g(a) = 0$ et $g'(a) \neq 0$.

Alors $\lim\limits_{x \to a^+} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{f'(a)}{g'(a)}$

a) $f(x) = \dfrac{x^3 + 2x^2 - x - 2}{x^2 - 4}$

$$\lim_{x \to -2} f(x) = \lim_{x \to -2} \frac{3x^2 + 4x - 1}{2x} = -\frac{3}{4}$$

---

b) $f(x) = \dfrac{\sqrt{2x^2+1} - 3}{x^2 - 4}$

$$\lim_{x \to +2} f(x) = \lim_{x \to +2} \frac{4x \times \frac{1}{2\sqrt{2x^2+1}}}{2x}$$

$$= \lim_{x \to +2} \frac{1}{\sqrt{2x^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{9}} = \frac{1}{3}$$

c) $f(x) = \dfrac{\ln(1+x) - x}{x^2}$

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{1+x} - 1}{2x} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1 - 1 - x}{1+x}}{2x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{-x}{2x(1+x)} = \lim_{x \to 0} -\frac{1}{2(1+x)} = -\frac{1}{2}.$$

15. **($\star$)** On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 \in \left[0, \frac{4}{3}\right], \\ u_{n+1} = \frac{1}{3}(4 - u_n^2) \quad \forall\, n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

(a) Montrer que $u_n \in \left[0, \frac{4}{3}\right]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(b) Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ était convergente, quelle serait sa limite ℓ ?

(c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - \ell| \leq \frac{8}{9}|u_n - \ell|$ et conclure que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

TD4, Ex 15

$$u_n : \begin{cases} u_0 \in [0; 4/3] \\ u_{n+1} = \frac{1}{3}(4 - u_n^2) \quad \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

a) MQ $u_n \in [0; 4/3]$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

~~On pose $f(x) = \frac{1}{3}(4 - x^2) - 2x$~~

Par récurrence,

$\mathcal{P}(n)$: " $u_n \in [0; 4/3]$ "

(I) À $n=0$, c'est donné !

(H) Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie, ie

$u_n \in [0; 4/3]$.

$0 \leq u_n^2 \leq \frac{16}{9}$

$-\frac{16}{9} \leq -u_n^2 \leq 0$

$4 - \frac{16}{9} \leq 4 - u_n^2 \leq 4$

$\frac{4}{3} - \frac{16}{27} \leq u_{n+1} \leq \frac{4}{3}$

$\frac{4}{3} - \frac{16}{27} = \frac{36-16}{27} > 0$

Ainsi $u_{n+1} \in [0; 4/3]$ d'où $\mathcal{P}(n+1)$ vraie.

(C) $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0; 4/3]$.

b) Supposons (u_n) convergente et notons sa limite ℓ.

Alors par passage à la limite dans $u_{n+1} = \dfrac{4-u_n^2}{3}$,

il vient $3\ell = 4 - \ell^2$

d'où $\ell^2 + 3\ell - 4 = 0$ ⊛

$\Delta = 9 + 16 = 25$

Donc ⊛ possède deux racines : $\dfrac{-3 \pm 5}{2} = -4$ ou 1

Or comme $u_n \in [0 ; 4/3]$ on a $\ell \in [0 ; 4/3]$

Donc nécessairement, $\ell = 1$.

---

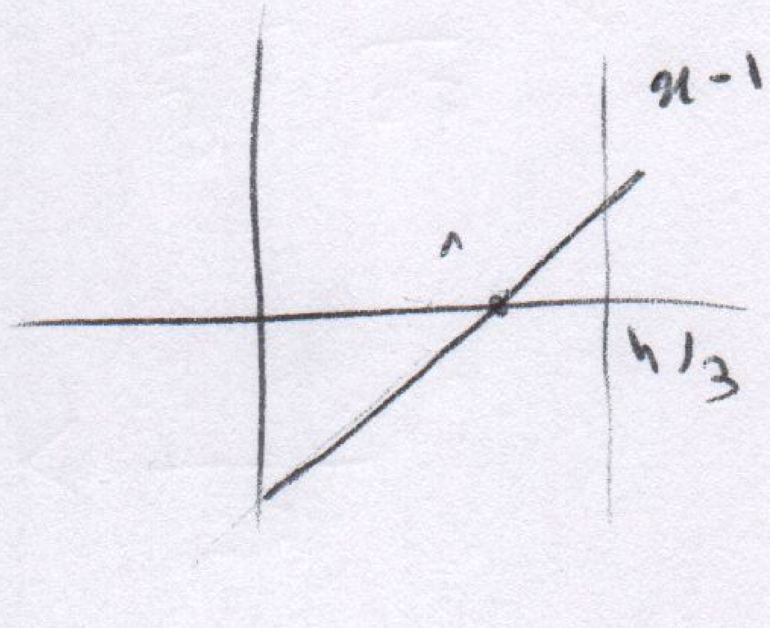
c) On a

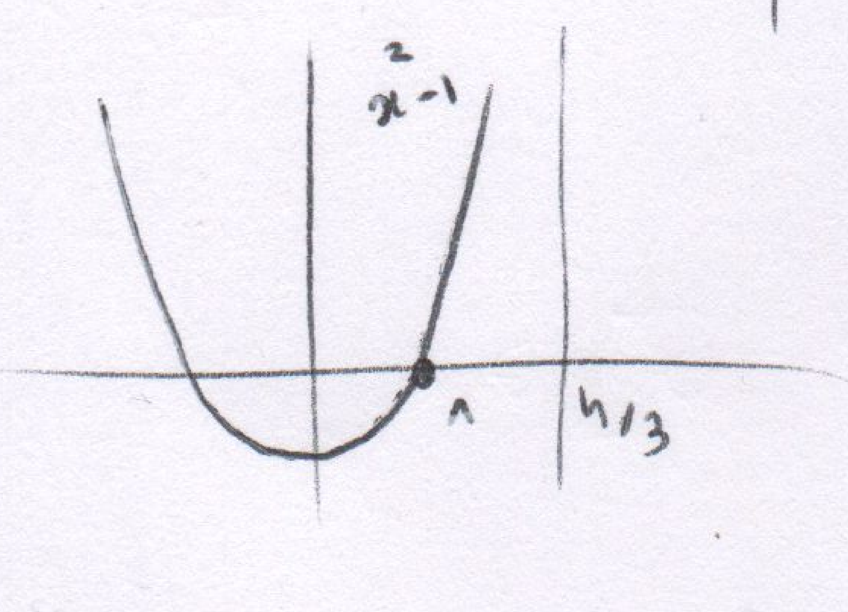
$$|u_{n+1} - \ell| = \left| \frac{4}{3} - \frac{u_n^2}{3} - 1 \right| = \frac{1}{3} |u_n^2 - 1|$$

MQ $|x^2 - 1| \leq \dfrac{8}{3} |x - 1| \quad \forall x \in [0 ; 4/3]$

On pose

$$f(x) = \frac{8}{3}|x-1| - |x^2 - 1| = \begin{cases} \frac{8}{3}(1-x) - (1-x^2) & \text{si } x < 1 \\ \frac{8}{3}(x-1) - (x^2-1) & \text{si } x > 1 \end{cases}$$





... Ex 15

$$f(x) = \begin{cases} \frac{8}{3} - \frac{8}{3}x - 1 + x^2 & (x \leq 1) \\ \frac{8}{3}x - \frac{8}{3} - x^2 + 1 & (x \geq 1) \end{cases}$$

$$= \begin{cases} x^2 - \frac{8}{3}x + \frac{5}{3} & (x \leq 1) \\ -\left(x^2 + \frac{8}{3}x + \frac{5}{3}\right) & (x \geq 1) \end{cases}$$

$$\Delta = \frac{64}{9} - \frac{20}{3} = \frac{64-60}{9} = \frac{4}{9} = \left(\frac{2}{3}\right)^2 > 0$$

Deux racines : $\dfrac{\frac{8}{3} \pm \frac{2}{3}}{2} = \dfrac{8 \pm 2}{6} = \dfrac{5}{3}$ ou 1

x	0	1	$4/3$
$x^2 - \frac{8}{3}x + \frac{5}{3}$	$+$	0	$-$
$-\left(x^2 - \frac{8}{3}x + \frac{5}{3}\right)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+$	0	$+$

Ainsi, $f \geq 0$ sur $[0; 4/3]$

d'où $|x^2 - 1| \leq \frac{8}{3}|x-1| \quad \forall x \in [0; 4/3]$

On avait

$$|u_{n+1} - l| = \frac{1}{3}|u_n^2 - 1| \leq \frac{1}{3} \times \frac{8}{3}|u_n - 1| = \frac{8}{9}|u_n - 1|$$
$$= \frac{8}{9}|u_n - l|$$

D'où $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - l| \leq \frac{8}{9}|u_n - l|$

...Ex 15 :

On peut alors montrer par récurrence que

$$0 \leq |u_n - l| \leq \left(\frac{8}{9}\right)^n |u_0 - l| \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

Ainsi, par le théorème des gendarmes,

(u_n) converge vers l.

16. On considère la fonction $f :]1, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{1}{x \ln x}$ et la suite $(u_n)_{n \geq 2}$ définie par

$$u_n = \sum_{k=2}^{n} f(k) = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k \ln k}.$$

(a) Montrer que f est strictement décroissante sur $]1, +\infty[$.

(b) Montrer que pour tout entier $n \geq 2$, on a

$$\frac{1}{(n+1)\ln(n+1)} \leq \ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln n) \leq \frac{1}{n \ln n}.$$

(c) En déduire que la suite $(u_n)_{n \geq 2}$ diverge vers $+\infty$ lorsque n tend vers $+\infty$.

TD4, Ex 16

$$f : \begin{cases} (1;+\infty) \to \mathbb{R} \\ x \longmapsto \dfrac{1}{x\ln x} \end{cases}$$

Pour $n \geq 2$,

$$u_n = \sum_{k=2}^{n} f(k) = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln(k)}$$

a) MQ f est ↘ stricte sur $(1;+\infty)$

$$f'(x) = -\frac{\ln(x) + \frac{x}{x}}{(x\ln x)^2} = -\frac{1+\ln(x)}{x\ln(x)}$$

Or $x > 1$, donc $\ln(x)$ et $1+\ln(x) > 0$

D'où $f' < 0$ sur $(1;+\infty)$

D'où f' est ↘ strictement sur $(1;+\infty)$.

b) Plus généralement, soit (v_n) une suite croissante. (c'est le cas de $\ln(n)$)

Il s'agit de montrer que

$$\frac{1}{(n+1)u_{n+1}} \overset{①}{\leq} \ln(u_{n+1}) - \ln(u_n) \overset{②}{\leq} \frac{1}{n u_n}$$

b) Pour $x \geqslant 2$, posons

$$F(x) = \ln(\ln(x))$$

Alors $F'(x) = \frac{1}{x} \times \frac{1}{\ln(x)} = \frac{1}{x\ln(x)} = f(x)$

THÉORÈME (INÉGALITÉ DES ACCROISSEMENTS FINIS) (IAF)

Soit $\varphi : [a;b] \to \mathbb{R}$ $(a<b)$, continue sur $[a;b]$ et dérivable sur $(a;b)$.

S'il existe $m < M$ tels que $m \leqslant \varphi'(x) \leqslant M, \forall x \in (a;b)$, alors

$$m(b-a) \leqslant \varphi(b) - \varphi(a) \leqslant M(b-a)$$

~~On a~~ $\cancel{F''(x) = -\frac{\ln(x)+1}{(x\ln x)^2}}$. ~~Or~~ $\cancel{x \geqslant 2 > 1}$ ~~donc~~ $\cancel{\ln(x)+1 > 1}$

~~d'où~~ $\cancel{F''(x) < 0 \quad \forall x \geqslant 2}$. D'après la question a, $f \searrow$ strictement sur $[2;+\infty)$. (*)

En appliquant le théorème avec $a = n$ et $b = n+1$, il vient

$$\frac{1}{(n+1)\ln(n+1)} \overset{(*)}{\leqslant} f'(x) = \frac{1}{x\ln x} \overset{(*)}{\leqslant} \frac{1}{n\ln n}$$

$\forall x \in [a;b]$ (par décroissance de f')

d'où par l'IAF,

$$\frac{1}{(n+1)\ln(n+1)} \leqslant \ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln(n)) \leqslant \frac{1}{n\ln n}.$$

c) On a $u_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln(k)}$

donc d'après l'inégalité établie au b),

$$u_n \geqslant \underbrace{\sum_{k=2}^{n} \left[\ln(\ln(k+1)) - \ln(\ln(k))\right]}_{(\Sigma \text{ Télescopique})}$$

$$= \ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln 2) \xrightarrow{n\to\infty} +\infty$$

Ainsi, par accompagnement,

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty.$$

17. ($\star$) Soit $f : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$ une fonction continue, dérivable sur $]a,b[$, et vérifiant $f(a) = f(b) = 0$. Soit $d \in \mathbb{R}\backslash[a,b]$. Montrer qu'il existe une tangente à la courbe représentative de f passant par le point $(d,0)$.

TD4, Ex 17

Soit $f : [a;b] \to \mathbb{R}$

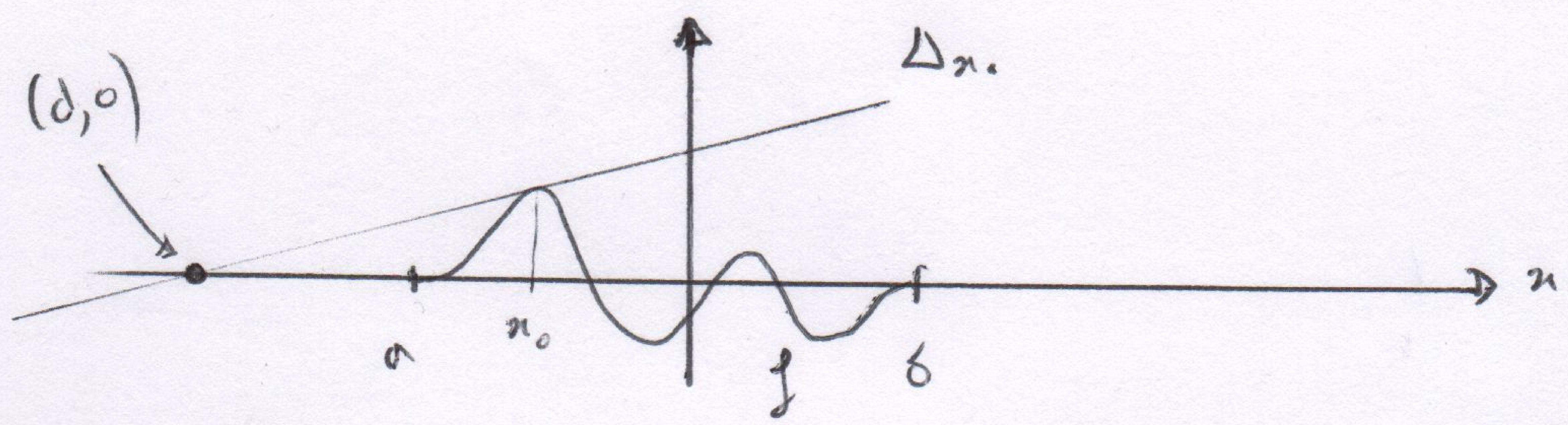
f continue sur $[a;b]$

f dérivable sur $(a;b)$

$f(a) = f(b) = 0.$

Soit $d \in \mathbb{R} \setminus [a;b] = (-\infty; a) \cup (b; +\infty)$

MQ $\exists$ une tangente à f passant par $(d, 0)$



Soit $x_0 \in [a;b]$, écrivons l'équation de la droite Δ_{x_0} passant par $(x_0, f(x_0))$ et $(d, 0)$:

Accroissement : $\dfrac{f(x_0)}{x_0 - d}$

D'où $\Delta_{x_0} : y = \dfrac{f(x_0)}{x_0 - d}(x - d)$

Pour que Δ_{x_0} soit tangente à $\mathcal{C}_f$ en x_0, il faut et il suffit :

$$\begin{cases} \hookrightarrow \Delta_{x_0} \text{ passe par } (x_0, f(x_0)) \quad \text{(ok par construction)} \\ \text{ET} \\ \hookrightarrow \dfrac{f(x_0)}{x_0 - d} = f'(x_0) \end{cases}$$

On cherche donc $\alpha \in (a;b)$ tq

$$\frac{f(\alpha)}{\alpha - d} = f'(\alpha).$$

Posons $g(x) = \dfrac{f(x)}{x-d}$ pour $x \in [a;b]$.

Alors g est :

↳ continue sur $[a;b]$

↳ Dérivable sur (a,b)

↳ $g(a) = g(b) = 0$

Donc d'après le théorème de Rolle :

$\exists \alpha \in (a;b) \,/\, g'(\alpha) = 0.$

Or

$$g'(\alpha) = \frac{f'(\alpha)(x-d) - f(\alpha)}{(x-d)^2}$$

Ainsi, $f'(\alpha)(x-d) - f(\alpha) = 0$

ie $\dfrac{f(\alpha)}{x-d} = f'(\alpha)$. Ainsi, en choisissant la droite Δ_α, on a :

↳ Δ_α est tangente à $\mathcal{C}_f$ en α

↳ Δ_α passe par d.

18. ($\star$) En utilisant la fonction $f :]1, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \ln(\ln x)$, montrer que

$$\ln\left(\frac{a+b}{2}\right) \geq \sqrt{(\ln a)(\ln b)} \quad \forall\, a, b \geq 1\,.$$

TD 4, Ex 18

$$f : \begin{cases} (1; +\infty) \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \ln(\ln(x)) \end{cases}$$

MQ $\ln\left(\frac{a+b}{2}\right) \geqslant \sqrt{\ln(a)\ln(b)} \quad \forall a, b \geqslant 1.$

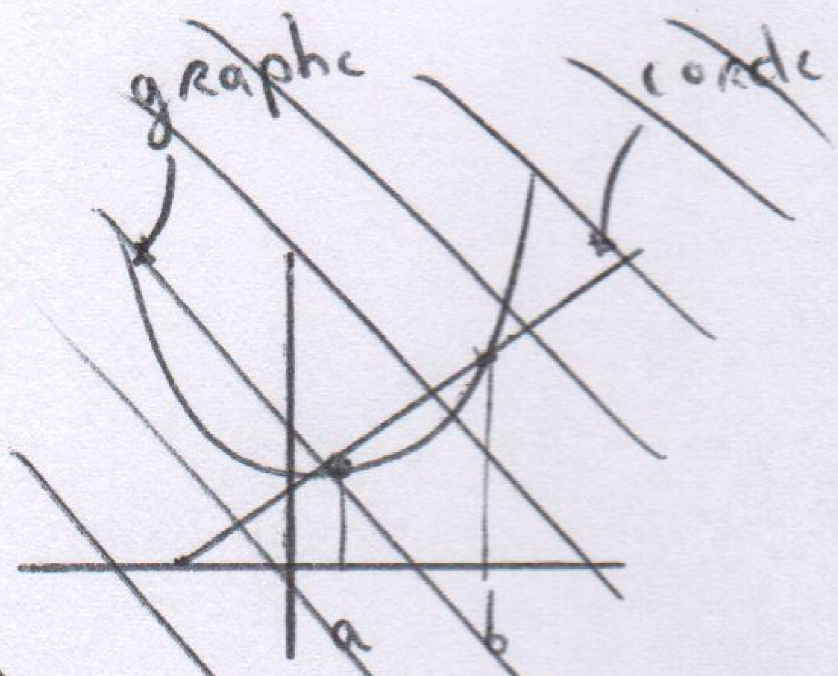
On a

$$f'(x) = \frac{1}{x} \times \frac{1}{\ln(x)} = \frac{1}{x\ln(x)}$$

$$f''(x) = -\frac{\ln(x) + \frac{x}{x}}{x^2\ln^2(x)} = -\frac{1+\ln(x)}{x^2\ln^2(x)}$$

Or $x > 1$ donc $1 + \ln(x) > 0$

D'où $f''(x) < 0 \ \forall x \in (1; +\infty)$ ie f est concave



Par conséquent, $\forall a, b \geqslant 1$, $\forall t \in [0;1]$,

$$f(ta + (1-t)b) \geqslant t f(a) + (1-t) f(b)$$

~~"Le graphe est en dessous de ses cordes."?~~

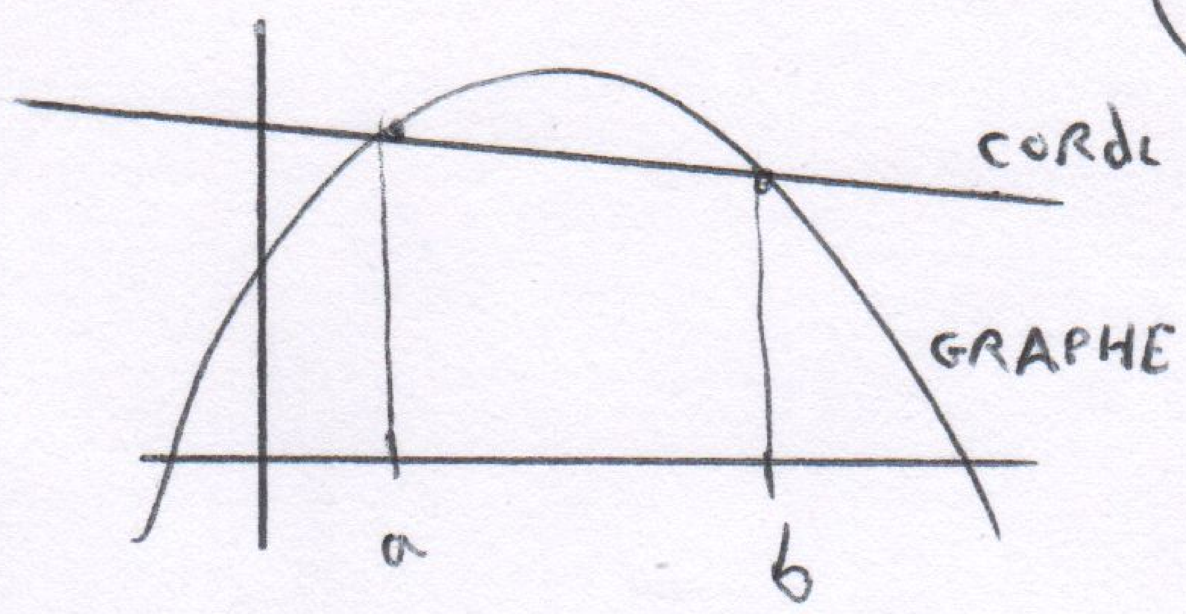
Ça c'était convexe...

d'où pour $t = 1/2$,

$$\ln\left(\ln\left(\frac{a+b}{2}\right)\right) \geqslant \frac{\ln(\ln(a)) + \ln(\ln(b))}{2}$$

$$\| \quad \frac{1}{2}\ln(\ln(a) \times \ln(b)) = \ln\left(\sqrt{\ln(a)\ln(b)}\right)$$

Ex 18



"Le graphe est au dessus de ses cordes"

Ainsi, on a

$$\ln\left(\ln\left(\frac{a+b}{2}\right)\right) \geqslant \ln\left(\sqrt{\ln(a)\ln(b)}\right)$$

d'où, en appliquant la fonction croissante exponentielle,

$$\ln\left(\frac{a+b}{2}\right) \geqslant \sqrt{\ln(a)\ln(b)}.$$

Remarque: L'inégalité peut être obtenue plus simplement:

$$\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2 = a+b-2\sqrt{ab} \geqslant 0$$

d'où $a+b \geqslant 2\sqrt{ab}$

d'où $\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}$ (*)

Ainsi, par croissance du log:

$$\ln\left(\frac{a+b}{2}\right) \geqslant \ln\left(\sqrt{ab}\right) = \frac{1}{2}\ln(ab) = \frac{\ln(a)+\ln(b)}{2}$$

$$\overset{(*)}{\geqslant} \sqrt{\ln(a)\ln(b)}.$$

19. **($\star$)** Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 satisfaisant la propriété

$$(\mathscr{P}) \qquad (f\circ f)(x) = \frac{x}{2}+3 \quad \forall\, x\in\mathbb{R}.$$

(a) Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}$, on a $f\left(\dfrac{x}{2}+3\right) = \dfrac{f(x)}{2}+3$.

(b) Montrer que la fonction f' est constante. [On pourra considérer la suite (u_n) définie par récurrence en posant $u_0 = x$ et $u_{n+1} = \frac{u_n}{2}+3$.]

(c) Trouver toutes les fonctions f vérifiant la propriété $(\mathscr{P})$.

TD4, Ex 19

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f \in \mathcal{C}^1$

f satisfait $(\mathcal{P})$. $(f \circ f)(x) = \frac{x}{2} + 3 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

a) Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$f\left(\frac{x}{2} + 3\right) = f\big(f \circ f(x)\big) = f\big(f(f(x))\big)$$

$$= (f \circ f)\big(f(x)\big) = \frac{f(x)}{2} + 3$$

---

b) MQ f' est constante sur $\mathbb{R}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$, posons pour $n \in \mathbb{N}$,

$$(u_n) : \begin{cases} u_0 = x \\ u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + 3 \quad \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Note: C'est une suite arithméticogéométrique (cf fiche TD 2); on peut calculer le terme général en montrant que $u_n - l = v_n$ est géométrique, où l est un point fixe de $x \mapsto \frac{x}{2} + 3$. Il en sort que $\lim\limits_{+\infty} u_n = 6$

Alors $f'(x) = f'(u_0)$, or on a d'après la q. a),

$$f(x) = 6 + 2f\left(\frac{x}{2} + 3\right) \text{ donc } f'(x) = 2 \times \frac{1}{2} \times f'\left(\frac{x}{2} + 3\right) = f'\left(\frac{x}{2} + 3\right)$$

Ainsi, on a $f'(x) = f'(u_0) = f'\left(\frac{u_0}{2} + 3\right) = f'(u_1) = f'\left(\frac{u_1}{2} + 3\right) = f'(u_2)$

etc...

D'où $\forall n \in \mathbb{N}$, $f'(x) = f'(u_n)$. Or $f \in \mathcal{C}^1$ donc f' est continue donc on peut passer à la limite à l'intérieur de f' !

$$f'(x) = f'(u_n) = f'\left(\lim_{n \to \infty} u_n\right) = f'(6) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Ainsi, f' est constante sur $\mathbb{R}$.

c) Comme f' est constante sur $\mathbb{R}$, alors $\exists a, b \in \mathbb{R} /$

$f(x) = ax+b$.

Cherchons des conditions sur a et b pour avoir (P).

$$\left[(f \circ f)(x) = \frac{x}{2} + 3\right] \Leftrightarrow \left[a(ax+b) + b = \frac{x}{2} + 3\right]$$

$$\Leftrightarrow \left[a^2 x + ab + b = \frac{x}{2} + 3\right]$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a^2 = \frac{1}{2} \\ ab + b = 3 \end{array}\right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \\ b\left(1 \pm \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 3 \end{array}\right]$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{c} \left[a = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ ET } b = \frac{3}{1 + 1/\sqrt{2}}\right] \\ \text{OU BIEN} \\ \left[a = -1/\sqrt{2} \text{ ET } b = \frac{3}{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}}\right] \end{array}\right]$$

Ainsi, les deux seules fonctions vérifiant (P) sont :

$$f_+(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} x + \frac{3}{1 + \sqrt{2}/2}$$

$$f_-(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} x + \frac{3}{1 - \sqrt{2}/2}.$$

20. Démonstration de la règle de L'Hôpital. Soient $f, g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues sur $[a,b]$ $(a<b)$ et dérivables sur $]a,b[$. On suppose que $g'(x) \neq 0$ pour tout $x \in]a,b[$.

(a) Montrer que $g(x) \neq g(a)$ pour tout $x \in]a,b]$.

(b) Posons $p = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$ et considérons la fonction $h(x) = f(x) - pg(x)$ pour tout $x \in [a,b]$.
Montrer que h vérifie les hypothèses du théorème de Rolle et en déduire qu'il existe un nombre réel $c \in]a,b[$ tel que

$$\frac{f(a)-f(b)}{g(a)-g(b)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

(c) On suppose que $\lim_{x \to b^-} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell$, où $\ell \in \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.
Montrer que :

$$\lim_{x \to b^-} \frac{f(x)-f(b)}{g(x)-g(b)} = \ell\,.$$

(d) Application : calculer la limite $\lim_{x \to 1^-} \frac{\arccos(x)}{\sqrt{1-x^2}}$.

TD 4, Ex 20 (Démonstration de la règle de l'Hôpital)

Soient $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ $(a < b)$

Continues sur $[a ; b]$, dérivable sur $(a ; b)$

On suppose $g'(x) \neq 0$ $\forall x \in (a ; b)$. $\circledast$

a) MQ $g(x) \neq g(a)$ $\forall x \in (a ; b)$.

Par l'absurde, supposons qu'il existe $x \in (a ; b)$ tq

$g(x) = g(a)$, alors par le théorème de Rolle,

$\exists \alpha \in (a ; x) \subset (a ; b)$ / $g'(\alpha) = 0$; cela contredit $\circledast$.

D'où $g(x) \neq g(a)$ $\forall x \in (a ; b)$.

---

b) $\rho := \dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$

$h(x) = f(x) - \rho g(x)$ pour $x \in [a ; b]$.

↳ h est continue sur $[a ; b]$,

↳ h est dérivable sur $(a ; b)$

↳ $h(a) = f(a) - \dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g(a) = \dfrac{f(a) g(b) - f(a) g(a) - f(b) g(a) - f(a) g(a)}{g(b) - g(a)}$

$= 0.$

↳ (Faire pareil) $h(b) = 0$.

on peut donc appliquer le théorème de Rolle sur h entre a et b :

$$\exists c \in (a;b) \,/\, h'(c) = 0$$

Or $h'(c) = f'(c) - p\,g'(c)$

Donc $f'(c) = p\,g'(c)$

d'où $$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f(a)-f(b)}{g(a)-g(b)}$$

---

c) On suppose que $\displaystyle\lim_{x \to b} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \in \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty ; -\infty\}$

Pour tout $x \in [a;b]$, $\exists\, c(x) \in (x;b) \,/$

$$\frac{f'(c(x))}{g'(c(x))} = \frac{f(x)-f(b)}{g(x)-g(b)} \quad (**)$$

Or, puisque $x < c(x) < b$, par le théorème des gendarmes,

$$c(x) \xrightarrow{x \to b^-} b^-$$

D'où en passant à la limite dans (**),

$$l = \lim_{x \to b^-} \frac{f'(c(x))}{g'(c(x))} = \lim_{x \to b^-} \frac{f(x)-f(b)}{g(x)-g(b)}.$$

d) On pose $f(x) = \arccos(x)$

$g(x) = \sqrt{1-x^2}$

$$f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$g'(x) = -2x \times \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}} = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

D'où

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{\arccos(x)}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{x \to 1^-} \frac{-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}} = \lim_{x \to 1^-} \frac{1}{x} = 1^-.$$