Adaptive level set evolution starting with a constant function

(Yan Wang et Chuanjian He, 2012)

Samuel Tréton, M2 MFA

Université de Rouen, Normandie

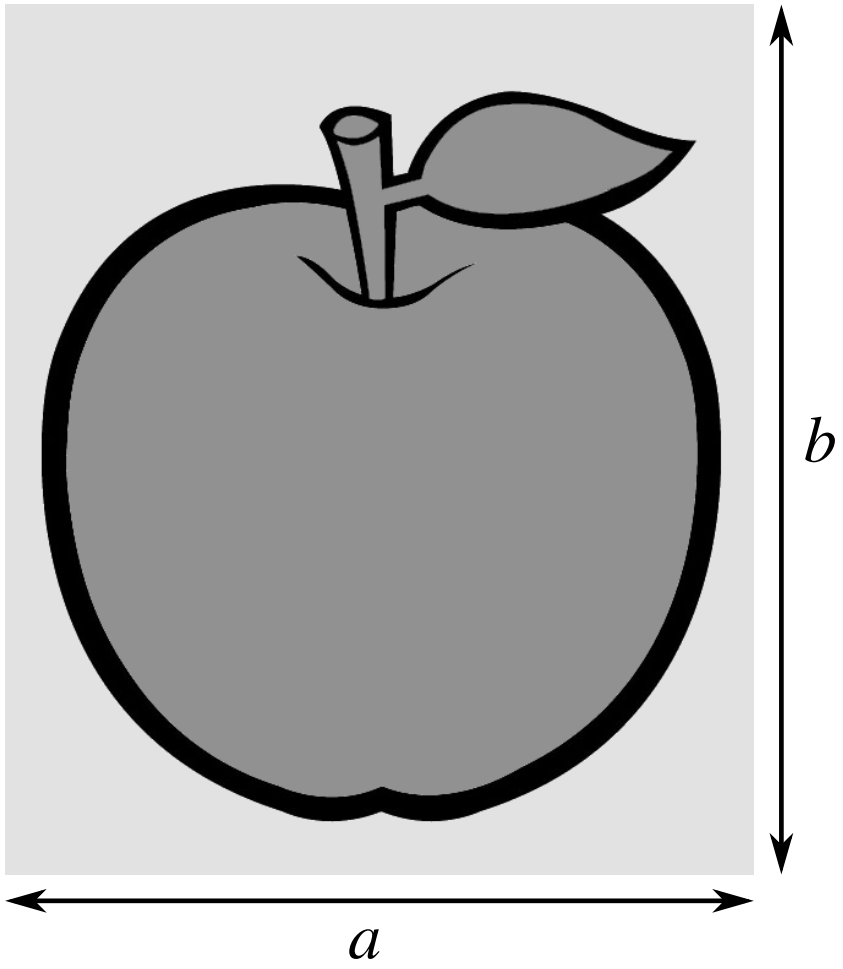
15 février 2021

Contexte du problème

Étant donnée une image,

$$I : [0;a] \times [0;b] \to [0;255]$$

on se propose détecter le contour des objets qu'elle contient.

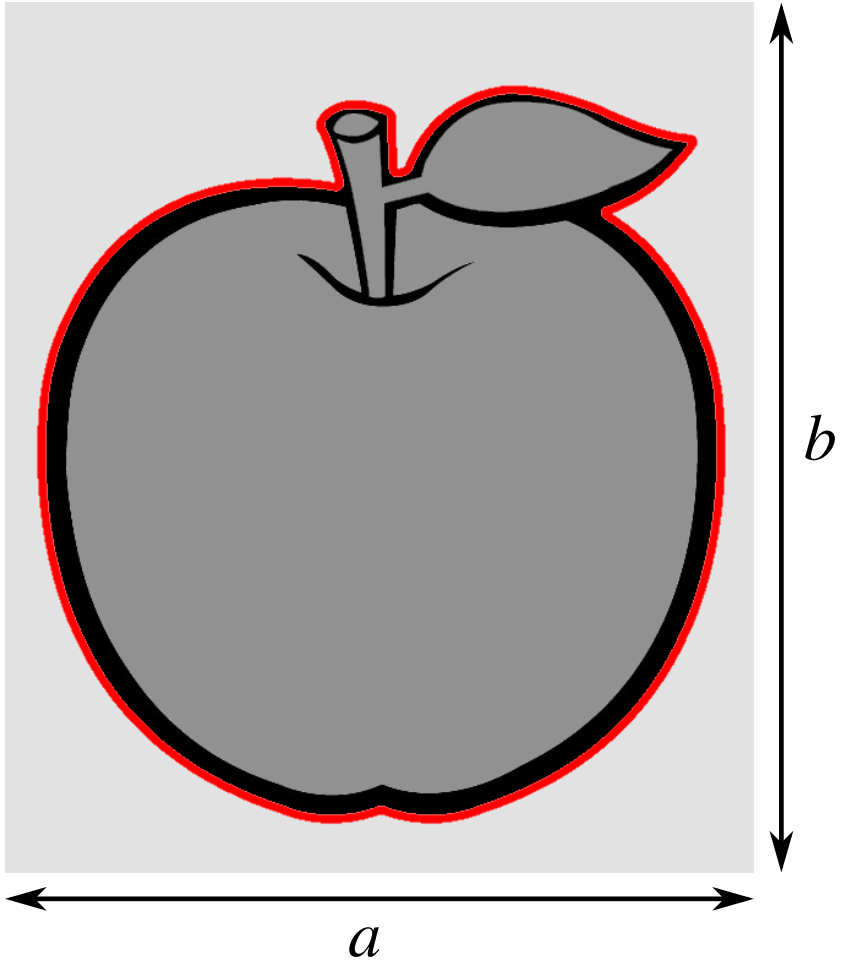


Contexte du problème

Étant donnée une image,

$$I : [0;a] \times [0;b] \to [0;255]$$

on se propose détecter le contour des objets qu'elle contient.



Plan

1 Principe et inconvénients des modèles antérieurs
- Le modèle des contours actifs
- L'approche level-set des contours actifs
- Présentation d'un modèle antérieur
- Inconvénients de ce modèle

2 Présentation du nouveau modèle
- La force de guidage F_{adapt}
- La force de régularisation F_{reg}

3 Implémentation du nouveau modèle et résultats expérimentaux

Plan

1 Principe et inconvénients des modèles antérieurs
- Le modèle des contours actifs
- L'approche level-set des contours actifs
- Présentation d'un modèle antérieur
- Inconvénients de ce modèle

2 Présentation du nouveau modèle
- La force de guidage F_{adapt}
- La force de régularisation F_{reg}

3 Implémentation du nouveau modèle et résultats expérimentaux

Principe et inconvénients des modèles antérieurs

Plusieurs modèles ont déjà été élaborés par le passé.

Principe et inconvénients des modèles antérieurs

Plusieurs modèles ont déjà été élaborés par le passé.

On se concentre ici sur le modèle des **contours actifs** basés sur l'approche **level-set**.

Plan

1 Principe et inconvénients des modèles antérieurs
- Le modèle des contours actifs
- L'approche level-set des contours actifs
- Présentation d'un modèle antérieur
- Inconvénients de ce modèle

2 Présentation du nouveau modèle
- La force de guidage F_{adapt}
- La force de régularisation F_{reg}

3 Implémentation du nouveau modèle et résultats expérimentaux

Principe et inconvénients des modèles antérieurs

Le modèle des **contours actifs**

On considère une courbe initiale C_0 sur l'image.

Principe et inconvénients des modèles antérieurs

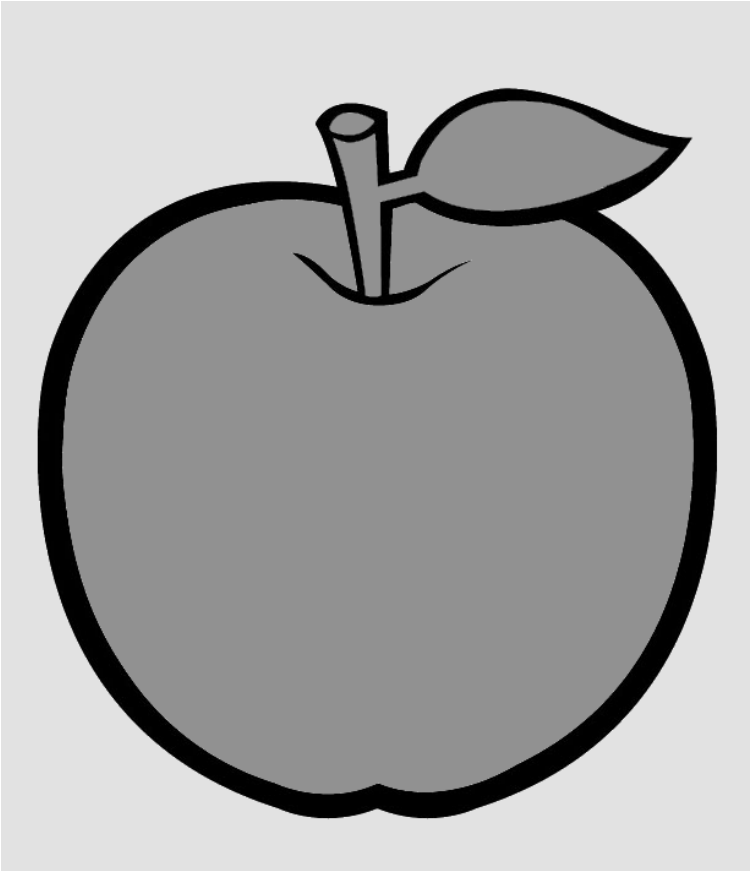
Le modèle des **contours actifs**

On considère une courbe initiale C_0 sur l'image.

On fait évoluer C_0 dans le temps pour qu'elle vienne épouser le contour des objets à détecter.

Principe et inconvénients des modèles antérieurs

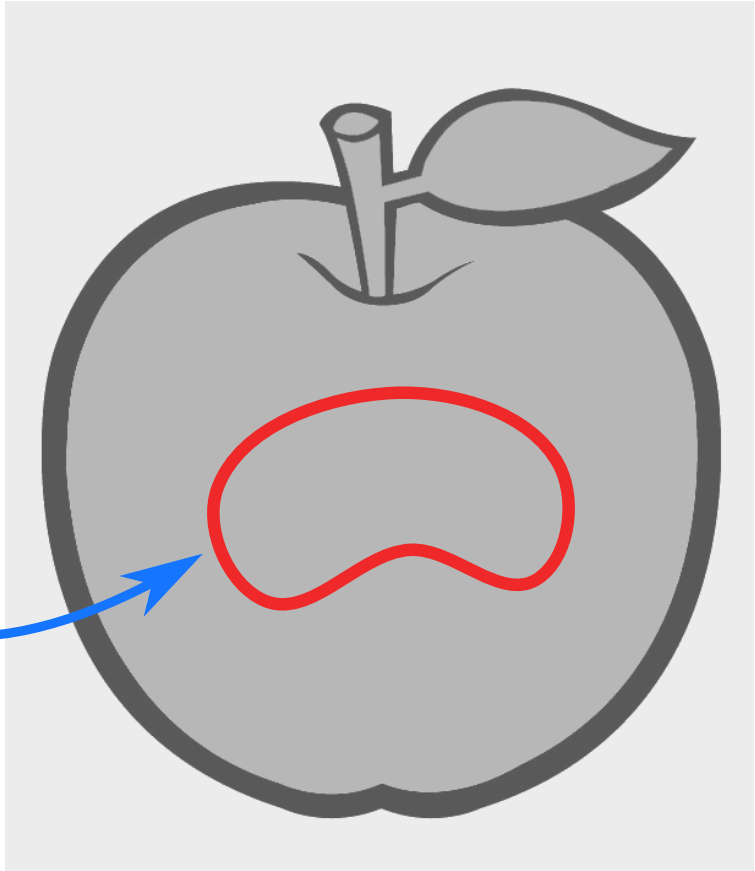
Le modèle des **contours actifs**



Principe et inconvénients des modèles antérieurs

Le modèle des **contours actifs**

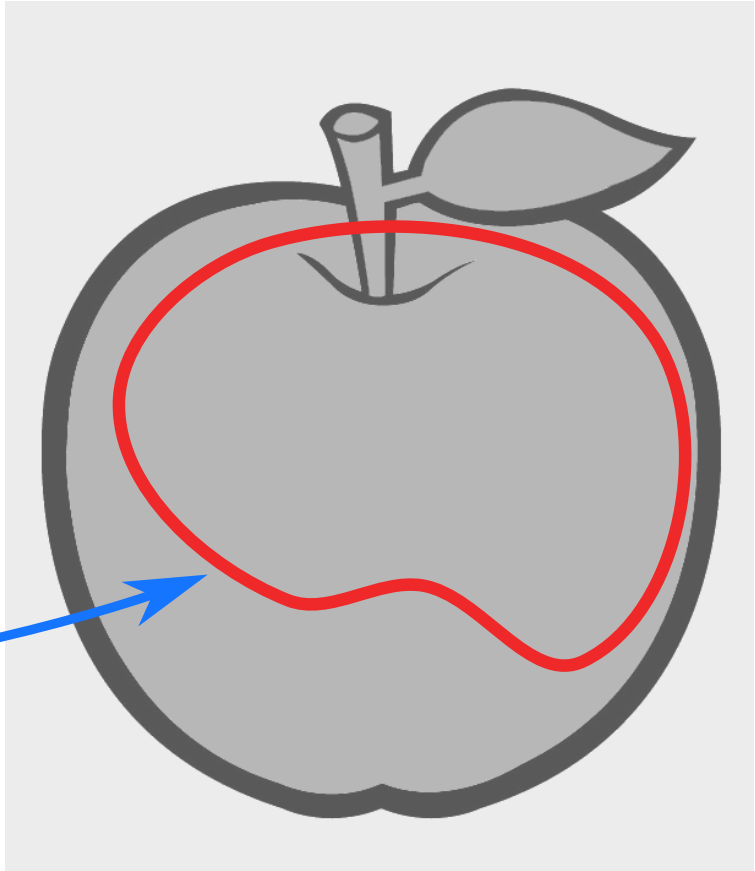
Courbe d'évolution
à son état initial $C(0) = C_0$



Principe et inconvénients des modèles antérieurs

Le modèle des **contours actifs**

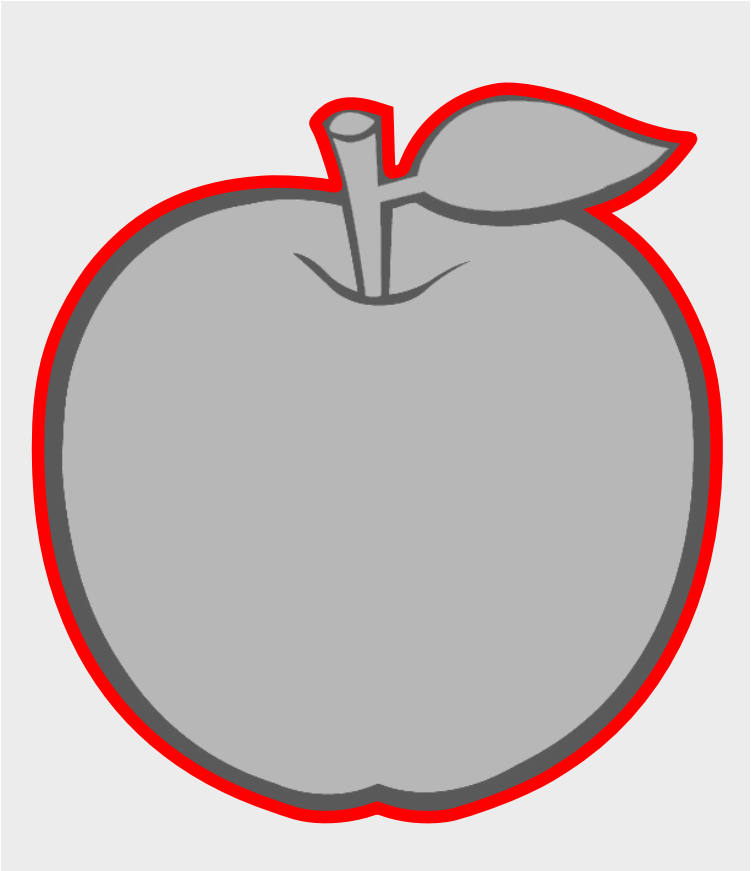
Évolution de la courbe d'évolution
$C(t)$ dans le temps



Principe et inconvénients des modèles antérieurs

Le modèle des **contours actifs**

État stationnaire
de la courbe d'évolution



Plan

1 Principe et inconvénients des modèles antérieurs
- Le modèle des contours actifs
- L'approche level-set des contours actifs
- Présentation d'un modèle antérieur
- Inconvénients de ce modèle

2 Présentation du nouveau modèle
- La force de guidage F_{adapt}
- La force de régularisation F_{reg}

3 Implémentation du nouveau modèle et résultats expérimentaux

Principe et inconvénients des modèles antérieurs

L'approche **level-set** des contours actifs

Pour $t \geq 0$, on représente implicitement la courbe $C(t)$ par la ligne de niveau 0 d'une fonction

$$u_t : [0;a] \times [0;b] \to \mathbb{R}.$$

Principe et inconvénients des modèles antérieurs

L'approche **level-set** des contours actifs

Pour $t \geq 0$, on représente implicitement la courbe $C(t)$ par la ligne de niveau 0 d'une fonction

$$u_t : [0;a] \times [0;b] \to \mathbb{R}.$$

On peut voir cette ligne de niveau comme l'intersection du graphe $3D$ de u_t avec le plan d'équation $z = 0$.

Principe et inconvénients des modèles antérieurs

L'approche **level-set** des contours actifs

Pour $t \geq 0$, on représente implicitement la courbe $C(t)$ par la ligne de niveau 0 d'une fonction

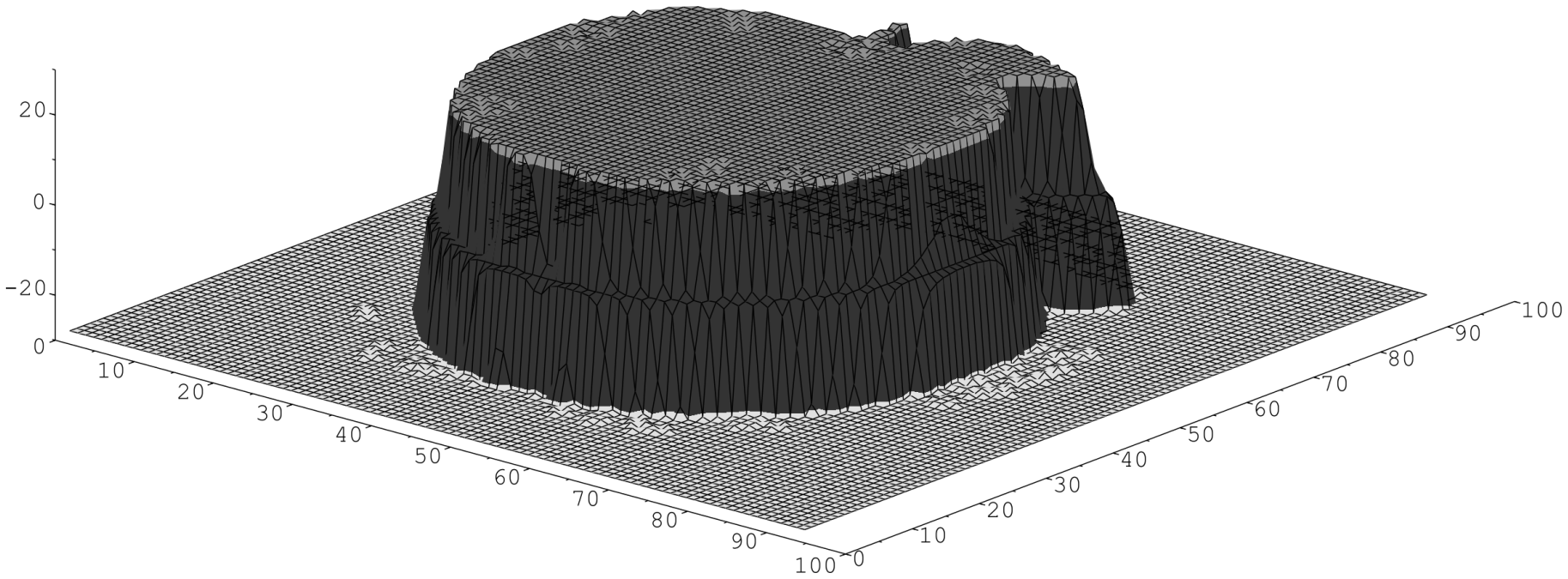
$$u_t : [0;a] \times [0;b] \to \mathbb{R}.$$

On peut voir cette ligne de niveau comme l'intersection du graphe $3D$ de u_t avec le plan d'équation $z = 0$.

À partir d'ici, on note $u(x,y,t)$ à la place de $u_t(x,y)$.

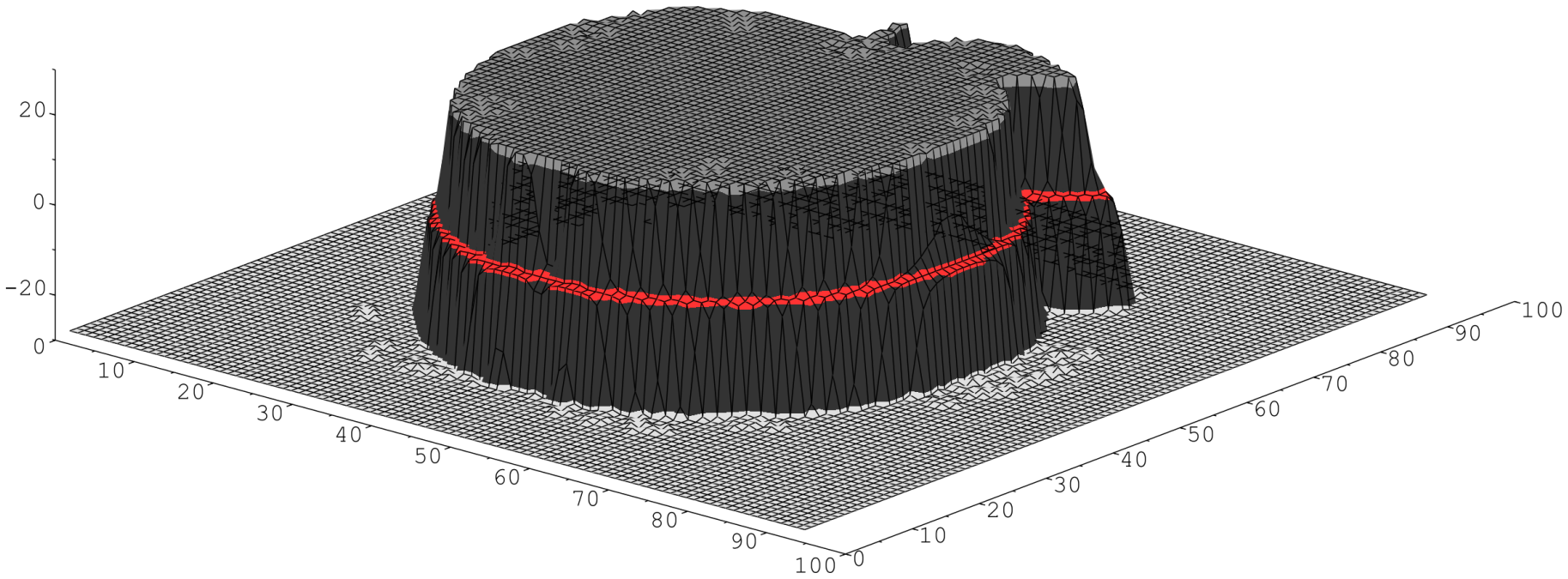
Principe et inconvénients des modèles antérieurs

L'approche **level-set** des contours actifs



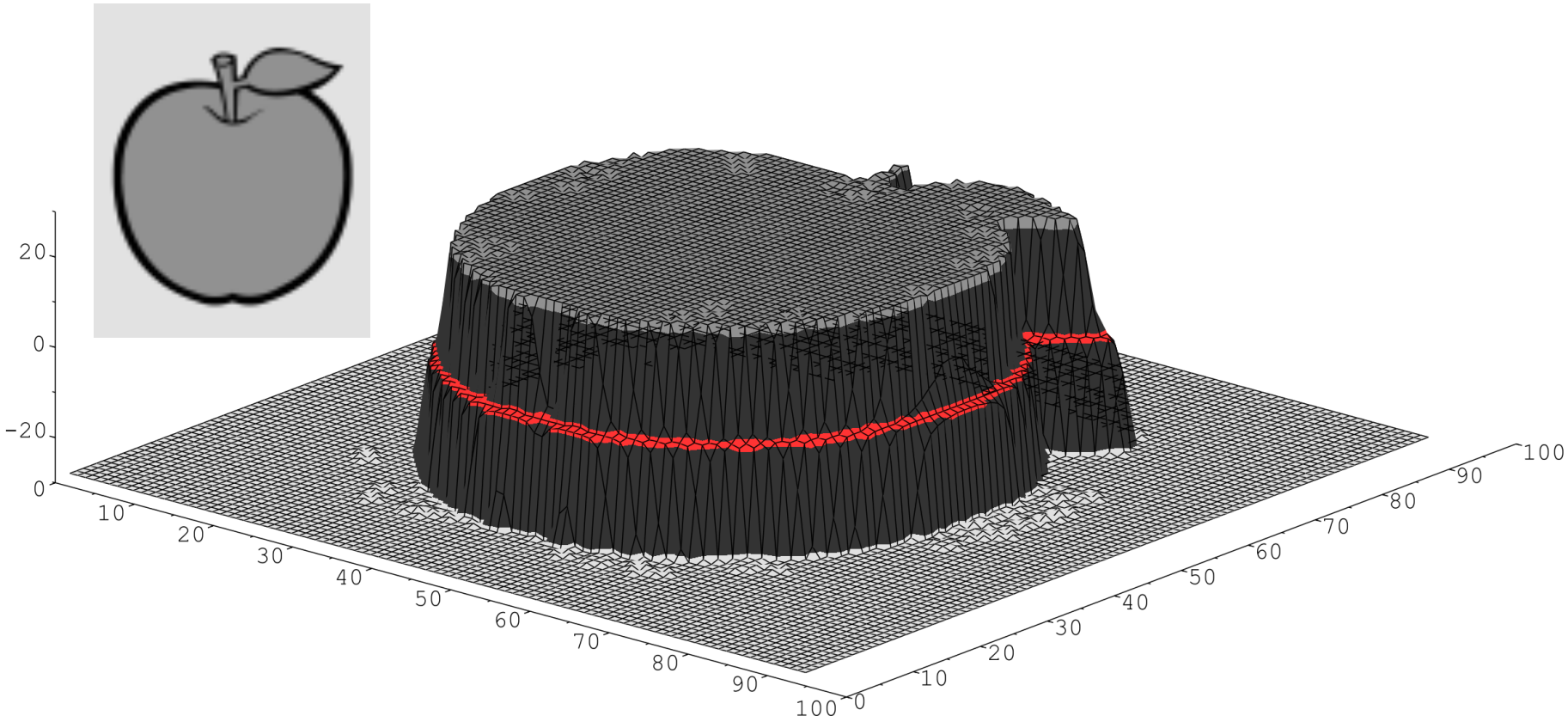
Principe et inconvénients des modèles antérieurs

L'approche **level-set** des contours actifs



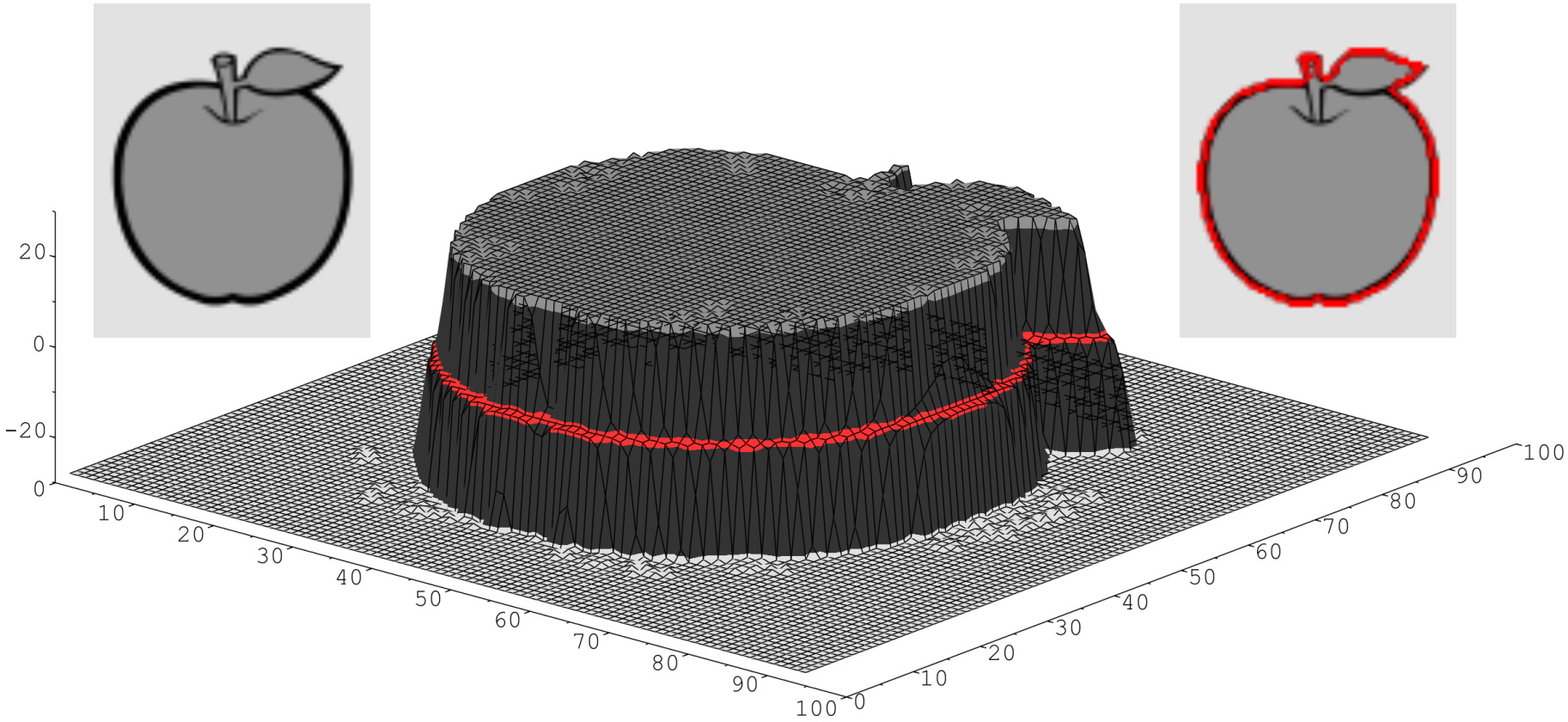
Principe et inconvénients des modèles antérieurs

L'approche **level-set** des contours actifs



Principe et inconvénients des modèles antérieurs

L'approche **level-set** des contours actifs



Plan

1 Principe et inconvénients des modèles antérieurs
- Le modèle des contours actifs
- L'approche level-set des contours actifs
- Présentation d'un modèle antérieur
- Inconvénients de ce modèle

2 Présentation du nouveau modèle
- La force de guidage F_{adapt}
- La force de régularisation F_{reg}

3 Implémentation du nouveau modèle et résultats expérimentaux

Principe et inconvénients des modèles antérieurs

Présentation d'un modèle antérieur

On présente maintenant le modèle de Caselles et al. [3].

Principe et inconvénients des modèles antérieurs

Présentation d'un modèle antérieur

On présente maintenant le modèle de Caselles et al. [3].

On donne l'EDP d'évolution pour la fonction level-set u :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = g\left(|\nabla I|\right)\left(\mathrm{div}\left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|}\right)|\nabla u| + v\,|\nabla u|\right) \\ u\left(x,y,0\right) = u_0\left(x,y\right). \end{cases}$$

Principe et inconvénients des modèles antérieurs

Présentation d'un modèle antérieur

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = g\left(|\nabla I|\right)\left(\text{div}\left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|}\right)|\nabla u| + v\,|\nabla u|\right) \\ u\left(x,y,0\right) = u_0\left(x,y\right). \end{cases}$$

Expliquons cette EDP

Principe et inconvénients des modèles antérieurs

Présentation d'un modèle antérieur

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = g\left(|\nabla I|\right)\left(\mathrm{div}\left(\dfrac{\nabla u}{|\nabla u|}\right)|\nabla u| + v\,|\nabla u|\right) \\ u\left(x,y,0\right) = u_0\left(x,y\right). \end{cases}$$

Principe et inconvénients des modèles antérieurs

Présentation d'un modèle antérieur

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = g\left(|\nabla I|\right)\left(\text{div}\left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|}\right)|\nabla u| + v\,|\nabla u|\right) \\ u\left(x,y,0\right) = u_0\left(x,y\right). \end{cases}$$

$$\text{div}\left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|}\right)|\nabla u| = \kappa|\nabla u|$$

Principe et inconvénients des modèles antérieurs

Présentation d'un modèle antérieur

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = g\left(|\nabla I|\right)\left(\text{div}\left(\dfrac{\nabla u}{|\nabla u|}\right)|\nabla u| + v\,|\nabla u|\right) \\ u\left(x,y,0\right) = u_0\left(x,y\right). \end{cases}$$

$$\left.\text{div}\left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|}\right)|\nabla u| = \kappa|\nabla u|\right\}$$

(Sous-entendu, évalué en (x,y))

Courbure de la ligne de niveau de u au point (x,y)

Principe et inconvénients des modèles antérieurs

Présentation d'un modèle antérieur

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = g\left(|\nabla I|\right)\left(\text{div}\left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|}\right)|\nabla u| + v\,|\nabla u|\right) \\ u\left(x,y,0\right) = u_0\left(x,y\right). \end{cases}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \kappa|\nabla u|$$

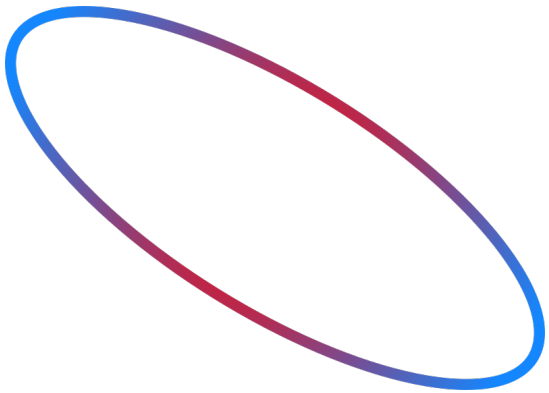
Les lignes de niveaux de u
se déplacent suivant la direction
de leur normale unitaire extérieure
à vitesse κ.

Principe et inconvénients des modèles antérieurs

Présentation d'un modèle antérieur

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = g\left(|\nabla I|\right)\left(\mathrm{div}\left(\dfrac{\nabla u}{|\nabla u|}\right)|\nabla u| + v\,|\nabla u|\right) \\ u\left(x,y,0\right) = u_0\left(x,y\right). \end{cases}$$

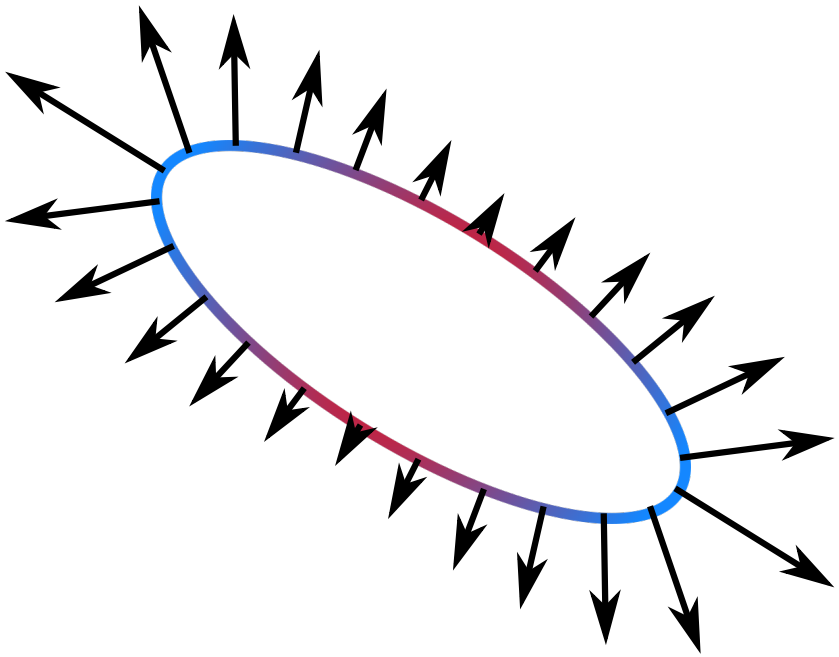
Une ligne de niveau de u



Principe et inconvénients des modèles antérieurs

Présentation d'un modèle antérieur

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = g\left(|\nabla I|\right)\left(\text{div}\left(\dfrac{\nabla u}{|\nabla u|}\right)|\nabla u| + v\,|\nabla u|\right) \\ u\left(x,y,0\right) = u_0\left(x,y\right). \end{cases}$$

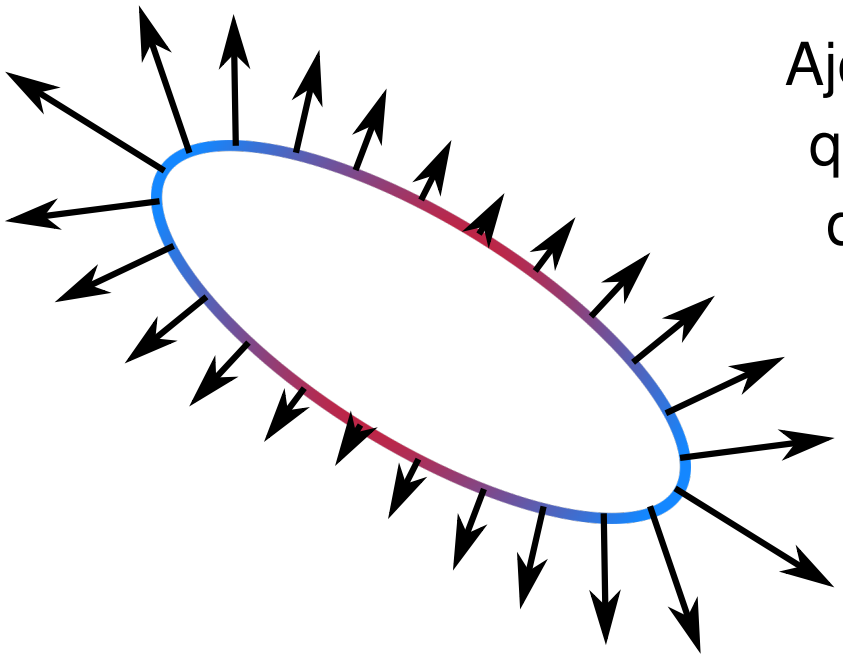


Les vecteurs de vitesse d'expansion de la ligne de niveau

Principe et inconvénients des modèles antérieurs

Présentation d'un modèle antérieur

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = g\left(|\nabla I|\right)\left(\text{div}\left(\dfrac{\nabla u}{|\nabla u|}\right)|\nabla u| + v\,|\nabla u|\right) \\ u\left(x,y,0\right) = u_0\left(x,y\right). \end{cases}$$

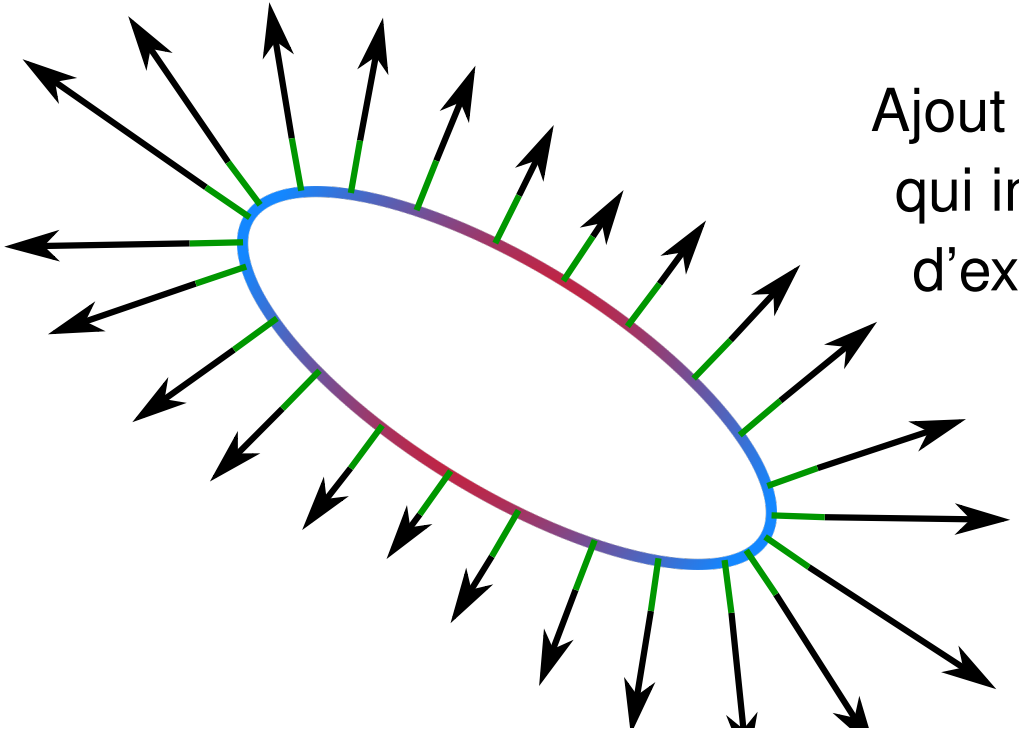


Ajout d'une force *balloon* qui impose une vitesse d'expansion minimale

Principe et inconvénients des modèles antérieurs

Présentation d'un modèle antérieur

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = g\left(|\nabla I|\right)\left(\text{div}\left(\dfrac{\nabla u}{|\nabla u|}\right)|\nabla u| + v\,|\nabla u|\right) \\ u\left(x,y,0\right) = u_0\left(x,y\right). \end{cases}$$



Ajout d'une force *balloon* qui impose une vitesse d'expansion minimale

Principe et inconvénients des modèles antérieurs

Présentation d'un modèle antérieur

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = g\left(|\nabla I|\right)\left(\mathrm{div}\left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|}\right)|\nabla u| + v\,|\nabla u|\right) \\ u\left(x,y,0\right) = u_0\left(x,y\right). \end{cases}$$

Principe et inconvénients des modèles antérieurs

Présentation d'un modèle antérieur

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = g\left(|\nabla I|\right)\left(\text{div}\left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|}\right)|\nabla u| + v\,|\nabla u|\right) \\ u\left(x,y,0\right) = u_0\left(x,y\right). \end{cases}$$

$g\left(|\nabla I|\right)$ est une fonction de stoppage
qui devient nulle sur les bords de l'objet à détecter
et qui neutralise ainsi l'évolution de l'EDP en ces points.

Principe et inconvénients des modèles antérieurs

Présentation d'un modèle antérieur

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = g\left(|\nabla I|\right)\left(\text{div}\left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|}\right)|\nabla u| + v\,|\nabla u|\right) \\ u\left(x,y,0\right) = u_0\left(x,y\right). \end{cases}$$

On prend $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$

Principe et inconvénients des modèles antérieurs

Présentation d'un modèle antérieur

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = g\left(|\nabla I|\right)\left(\text{div}\left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|}\right)|\nabla u| + v\,|\nabla u|\right) \\ u\left(x,y,0\right) = u_0\left(x,y\right). \end{cases}$$

On prend $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$

- strictement décroissante,

Principe et inconvénients des modèles antérieurs

Présentation d'un modèle antérieur

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = g\left(|\nabla I|\right)\left(\text{div}\left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|}\right)|\nabla u| + v\,|\nabla u|\right) \\ u\left(x,y,0\right) = u_0\left(x,y\right). \end{cases}$$

On prend $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$

- strictement décroissante,
- strictement positive,

Principe et inconvénients des modèles antérieurs

Présentation d'un modèle antérieur

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = g\left(|\nabla I|\right)\left(\text{div}\left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|}\right)|\nabla u| + v\,|\nabla u|\right) \\ u\left(x,y,0\right) = u_0\left(x,y\right). \end{cases}$$

On prend $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$

- strictement décroissante,
- strictement positive,
- de limite nulle en $+\infty$.

Principe et inconvénients des modèles antérieurs

Présentation d'un modèle antérieur

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = g\left(|\nabla I|\right)\left(\text{div}\left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|}\right)|\nabla u| + v\,|\nabla u|\right) \\ u\left(x,y,0\right) = u_0\left(x,y\right). \end{cases}$$

Par exemple

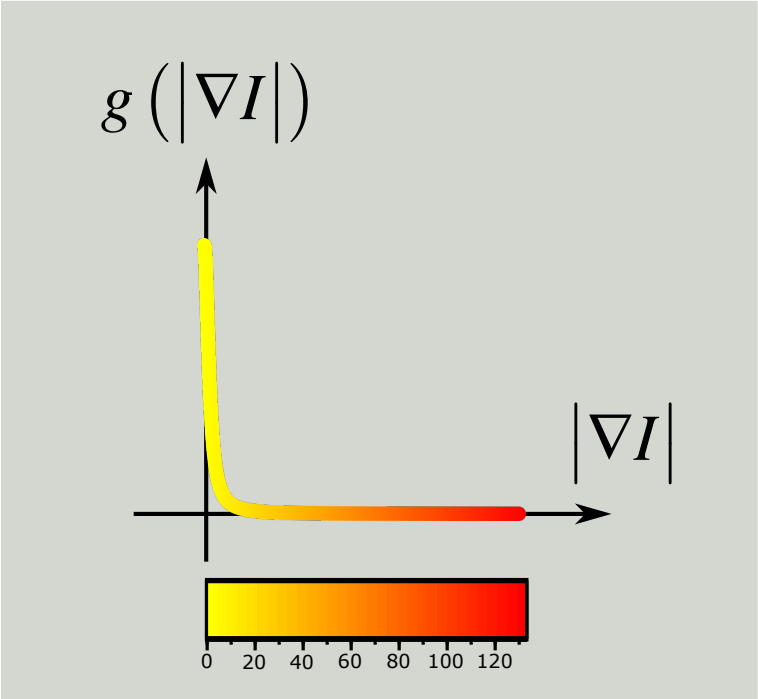
$$g\left(|\nabla I|\right) = \frac{1}{1+\left|\nabla \hat{I}\right|^2} \quad \text{ou bien} \quad \exp\left(-\frac{\left|\nabla \hat{I}\right|}{20}\right),$$

où $\hat{I}$ est une version de l'image lissée par filtre gaussien.

Principe et inconvénients des modèles antérieurs

Présentation d'un modèle antérieur

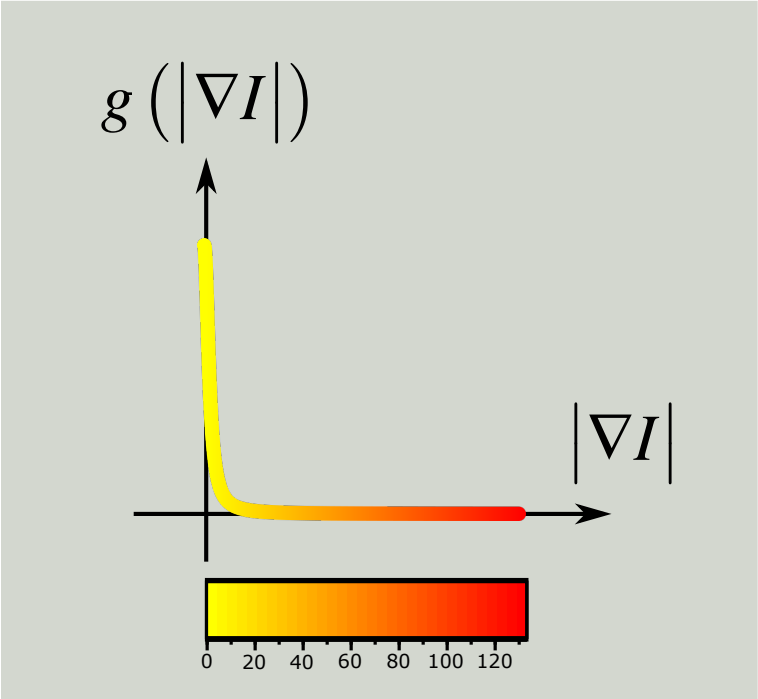
$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = g\left(|\nabla I|\right)\left(\mathrm{div}\left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|}\right)|\nabla u| + v\,|\nabla u|\right) \\ u\left(x,y,0\right) = u_0\left(x,y\right). \end{cases}$$

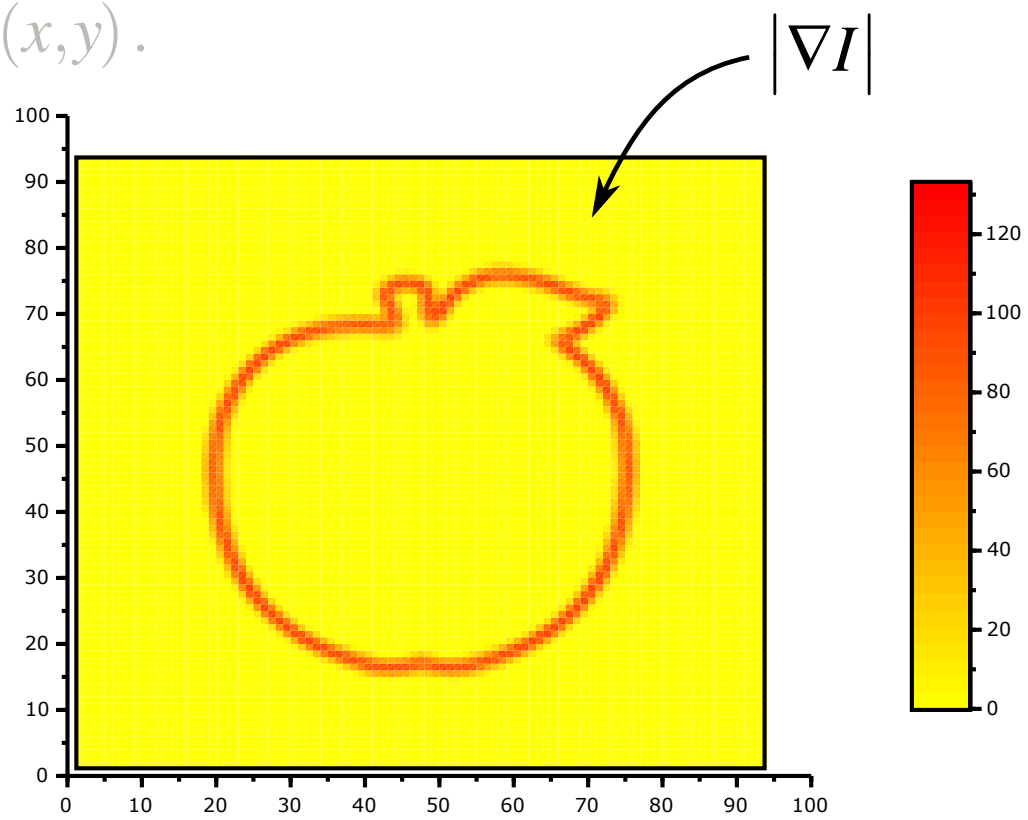


Principe et inconvénients des modèles antérieurs

Présentation d'un modèle antérieur

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = g\left(|\nabla I|\right)\left(\text{div}\left(\dfrac{\nabla u}{|\nabla u|}\right)|\nabla u| + v\,|\nabla u|\right) \\ u\left(x,y,0\right) = u_0\left(x,y\right). \end{cases}$$

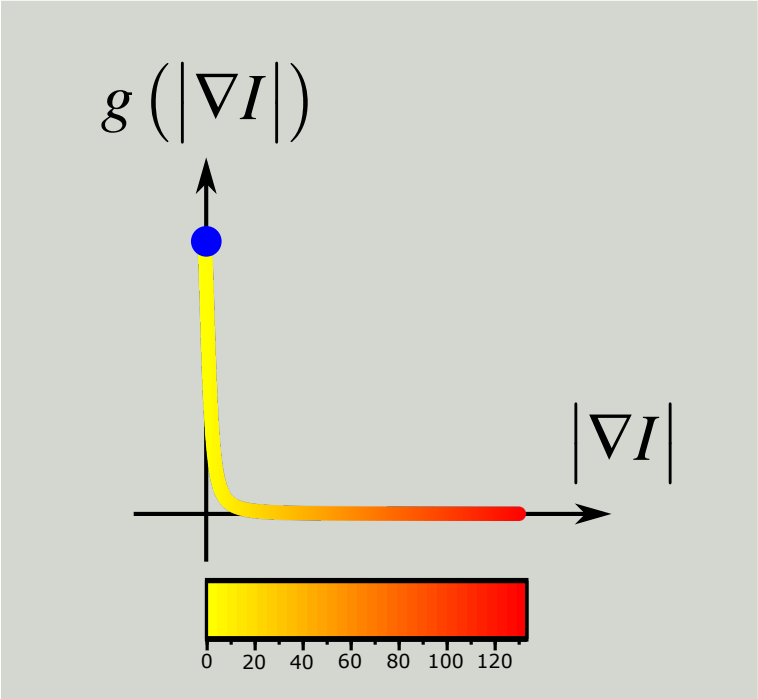


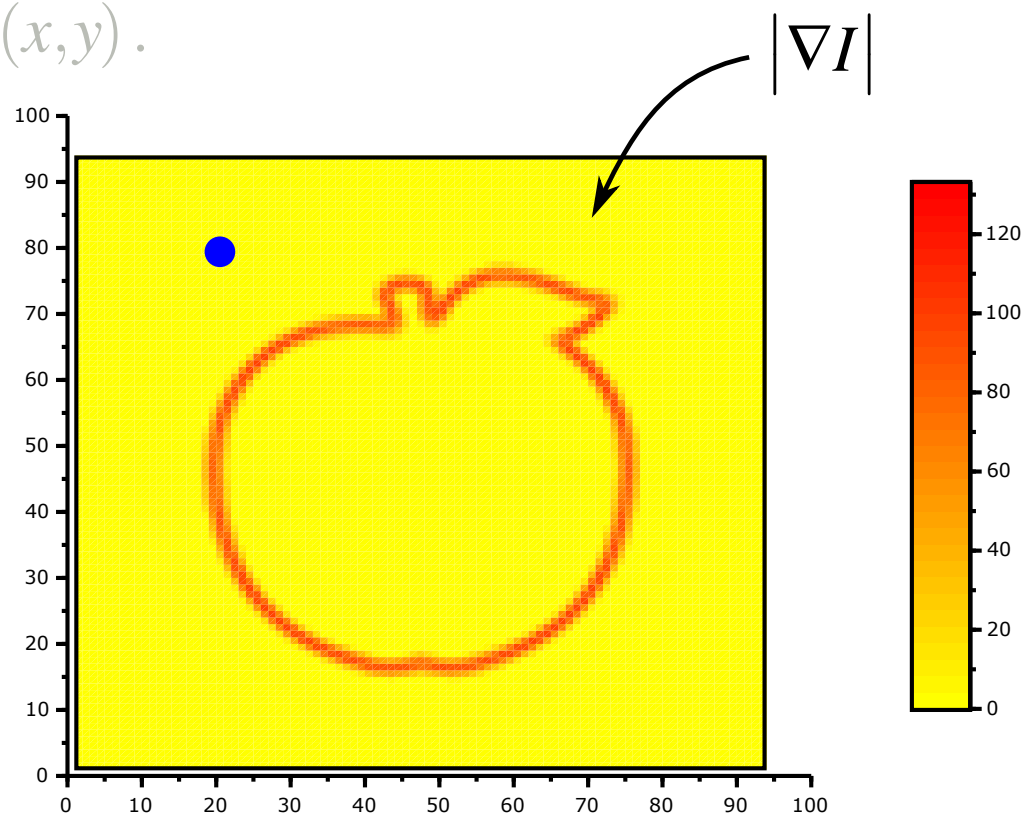


Principe et inconvénients des modèles antérieurs

Présentation d'un modèle antérieur

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = g\left(|\nabla I|\right)\left(\mathrm{div}\left(\dfrac{\nabla u}{|\nabla u|}\right)|\nabla u| + v\,|\nabla u|\right) \\ u\left(x,y,0\right) = u_0\left(x,y\right). \end{cases}$$

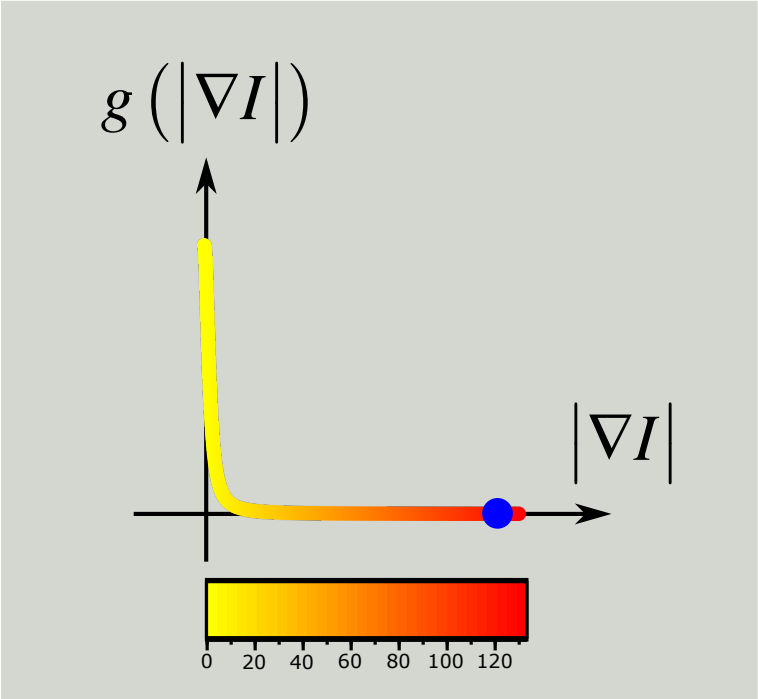


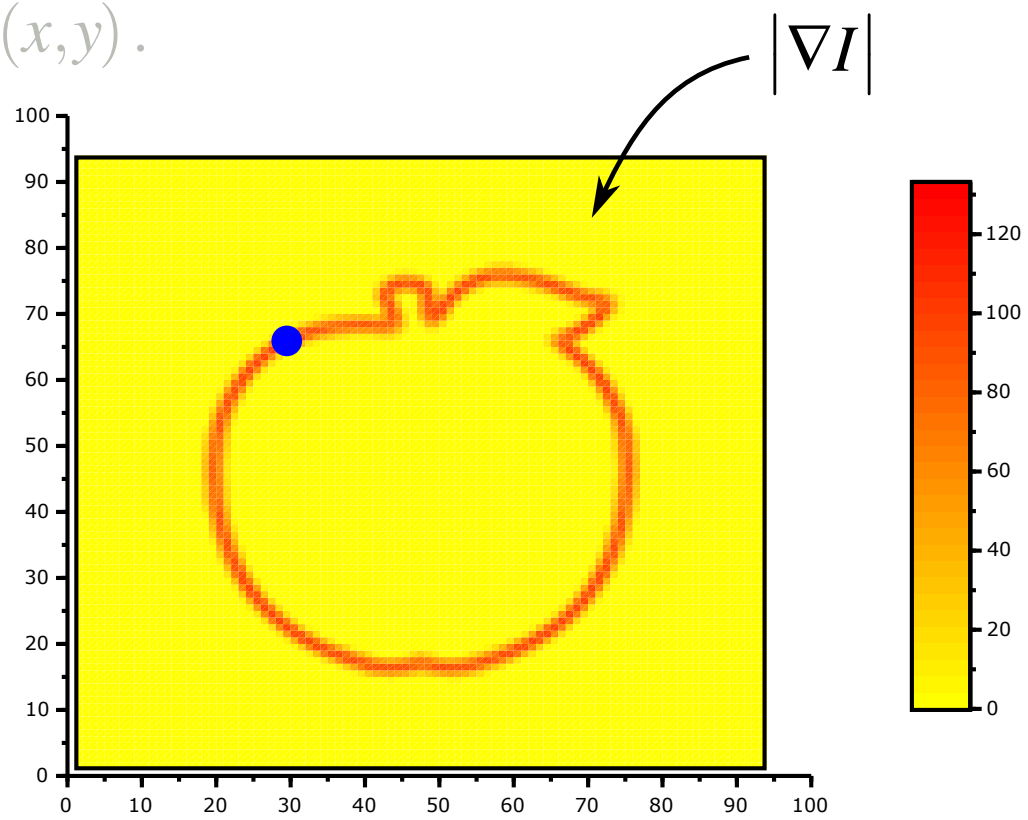


Principe et inconvénients des modèles antérieurs

Présentation d'un modèle antérieur

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = g\left(|\nabla I|\right)\left(\mathrm{div}\left(\dfrac{\nabla u}{|\nabla u|}\right)|\nabla u| + v\,|\nabla u|\right) \\ u\left(x,y,0\right) = u_0\left(x,y\right). \end{cases}$$





Principe et inconvénients des modèles antérieurs

Présentation d'un modèle antérieur

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = g\left(|\nabla I|\right)\left(\mathrm{div}\left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|}\right)|\nabla u| + v\,|\nabla u|\right) \\ u\left(x,y,0\right) = u_0\left(x,y\right). \end{cases}$$

Principe et inconvénients des modèles antérieurs

Présentation d'un modèle antérieur

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = g\left(|\nabla I|\right)\left(\mathrm{div}\left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|}\right)|\nabla u| + v\,|\nabla u|\right) \\ u\left(x,y,0\right) = u_0\left(x,y\right). \end{cases}$$

- On choisit u_0 telle que sa ligne de niveau 0 coïncide avec la courbe initiale C_0.

Principe et inconvénients des modèles antérieurs

Présentation d'un modèle antérieur

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = g\left(|\nabla I|\right)\left(\text{div}\left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|}\right)|\nabla u| + v\,|\nabla u|\right) \\ u\left(x,y,0\right) = u_0\left(x,y\right). \end{cases}$$

- On choisit u_0 telle que sa ligne de niveau 0 coïncide avec la courbe initiale C_0.
- On prend habituellement la fonction **distance signée** à la courbe initiale, ie.

$$u_0\left(x,y\right) = \begin{cases} d\left(\left(x,y\right),C_0\right) & \text{si } \left(x,y\right) \in \text{int}\left(C_0\right), \\ -d\left(\left(x,y\right),C_0\right) & \text{si } \left(x,y\right) \in \text{ext}\left(C_0\right), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Principe et inconvénients des modèles antérieurs

Présentation d'un modèle antérieur

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = g\left(|\nabla I|\right)\left(\mathrm{div}\left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|}\right)|\nabla u| + v\,|\nabla u|\right) \\ u\left(x,y,0\right) = u_0\left(x,y\right). \end{cases}$$

Remarque : il est commode de prendre un cercle pour C_0 car on connaît explicitement sa fonction distance signée

Principe et inconvénients des modèles antérieurs

Présentation d'un modèle antérieur

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = g\left(|\nabla I|\right)\left(\text{div}\left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|}\right)|\nabla u| + v\,|\nabla u|\right) \\ u\left(x,y,0\right) = u_0\left(x,y\right). \end{cases}$$

Remarque : il est commode de prendre un cercle pour C_0 car on connaît explicitement sa fonction distance signée :

$$u_0\left(x,y\right) = r - \sqrt{\left(x-x_0\right)^2 + \left(y-y_0\right)^2}$$

Principe et inconvénients des modèles antérieurs

Présentation d'un modèle antérieur

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = g\left(|\nabla I|\right)\left(\text{div}\left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|}\right)|\nabla u| + v\,|\nabla u|\right) \\ u\left(x,y,0\right) = u_0\left(x,y\right). \end{cases}$$

Remarque : il est commode de prendre un cercle pour C_0 car on connaît explicitement sa fonction distance signée :

$$u_0\left(x,y\right) = r - \sqrt{\left(x-x_0\right)^2 + \left(y-y_0\right)^2}$$

où $\left(x_0, y_0\right)$ est le centre du cercle C_0 et r son rayon.

Principe et inconvénients des modèles antérieurs

Présentation d'un modèle antérieur

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = g\left(|\nabla I|\right)\left(\text{div}\left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|}\right)|\nabla u| + v\,|\nabla u|\right) \\ u\left(x,y,0\right) = u_0\left(x,y\right). \end{cases}$$

Remarque : il est commode de prendre un cercle pour C_0 car on connaît explicitement sa fonction distance signée :

$$u_0\left(x,y\right) = r - \sqrt{\left(x-x_0\right)^2 + \left(y-y_0\right)^2}$$

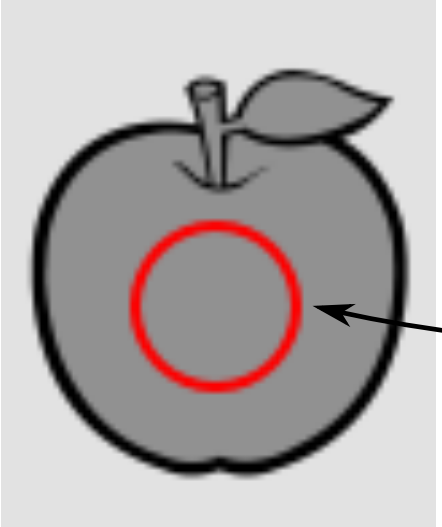
où $\left(x_0, y_0\right)$ est le centre du cercle C_0 et r son rayon.

Le graphe de u_0 est alors un cône restreint au domaine de l'image.

Principe et inconvénients des modèles antérieurs

Présentation d'un modèle antérieur

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = g\left(|\nabla I|\right)\left(\text{div}\left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|}\right)|\nabla u| + v\,|\nabla u|\right) \\ u\left(x,y,0\right) = u_0\left(x,y\right). \end{cases}$$

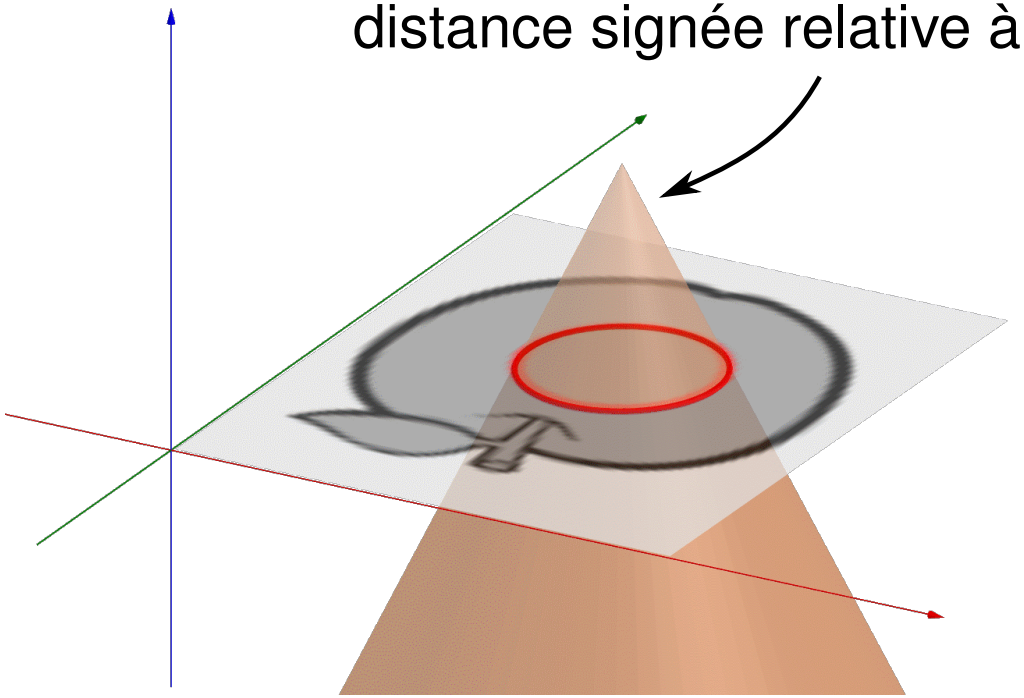


La courbe initiale C_0

Principe et inconvénients des modèles antérieurs

Présentation d'un modèle antérieur

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = g\left(|\nabla I|\right)\left(\text{div}\left(\dfrac{\nabla u}{|\nabla u|}\right)|\nabla u| + v\,|\nabla u|\right) \\ u\left(x,y,0\right) = u_0\left(x,y\right). \end{cases}$$



Plan

1 Principe et inconvénients des modèles antérieurs
- Le modèle des contours actifs
- L'approche level-set des contours actifs
- Présentation d'un modèle antérieur
- Inconvénients de ce modèle

2 Présentation du nouveau modèle
- La force de guidage F_{adapt}
- La force de régularisation F_{reg}

3 Implémentation du nouveau modèle et résultats expérimentaux

Principe et inconvénients des modèles antérieurs

Inconvénients de ce modèle

On a deux inconvénients pour ce modèle.

Principe et inconvénients des modèles antérieurs

Inconvénients de ce modèle

Premier inconvénient :

Comment initialiser ?

Principe et inconvénients des modèles antérieurs

Inconvénients de ce modèle

Premier inconvénient :

Comment initialiser ?

On utilise la fonction distance signée de la courbe C_0.

Principe et inconvénients des modèles antérieurs

Inconvénients de ce modèle

Premier inconvénient :

Comment initialiser ?

On utilise la fonction distance signée de la courbe C_0.

Laquelle ?

Principe et inconvénients des modèles antérieurs

Inconvénients de ce modèle

Premier inconvénient :

Comment initialiser ?

On utilise la fonction distance signée de la courbe C_0.

Laquelle ?

Un cercle ?

Principe et inconvénients des modèles antérieurs

Inconvénients de ce modèle

Premier inconvénient :

Comment initialiser ?

On utilise la fonction distance signée de la courbe C_0.

Laquelle ?

Un cercle ?

Autre chose ?

Principe et inconvénients des modèles antérieurs

Inconvénients de ce modèle

Premier inconvénient :

Comment initialiser ?

On utilise la fonction distance signée de la courbe C_0.

Laquelle ?

Un cercle ?

Autre chose ?

Où la placer ?

Principe et inconvénients des modèles antérieurs

Inconvénients de ce modèle

Premier inconvénient :

Comment initialiser ?

On utilise la fonction distance signée de la courbe C_0.

Laquelle ?

Un cercle ?

Autre chose ?

Où la placer ?

Comment la disposer ?

Principe et inconvénients des modèles antérieurs

Inconvénients de ce modèle

Premier inconvénient :

Comment initialiser ?

On utilise la fonction distance signée de la courbe C_0.

Laquelle ?

Un cercle ? Autre chose ?

Où la placer ? Comment la disposer ?

(Alors qu'on a *a priori* aucune information sur l'image...)

Principe et inconvénients des modèles antérieurs

Inconvénients de ce modèle

Deuxième inconvénient :

Principe et inconvénients des modèles antérieurs

Inconvénients de ce modèle

Deuxième inconvénient :

Il n'est pas garanti que l'état stationnaire de la fonction u nous donne exactement la courbe du contours des objets à détecter.

Principe et inconvénients des modèles antérieurs

Inconvénients de ce modèle

Deuxième inconvénient :

Il n'est pas garanti que l'état stationnaire de la fonction u nous donne exactement la courbe du contours des objets à détecter.

Si tel n'est n'est pas le cas, on ré-initialise la fonction level-set à une fonction distance signée relative à la courbe stationnaire qu'on vient d'obtenir.

Principe et inconvénients des modèles antérieurs

Inconvénients de ce modèle

Deuxième inconvénient :

Il n'est pas garanti que l'état stationnaire de la fonction u nous donne exactement la courbe du contours des objets à détecter.

Si tel n'est n'est pas le cas, on ré-initialise la fonction level-set à une fonction distance signée relative à la courbe stationnaire qu'on vient d'obtenir.

La question est :

Principe et inconvénients des modèles antérieurs

Inconvénients de ce modèle

Deuxième inconvénient :

Il n'est pas garanti que l'état stationnaire de la fonction u nous donne exactement la courbe du contours des objets à détecter.

Si tel n'est n'est pas le cas, on ré-initialise la fonction level-set à une fonction distance signée relative à la courbe stationnaire qu'on vient d'obtenir.

La question est :

Quand et comment ré-initialiser ?

Principe et inconvénients des modèles antérieurs

Inconvénients de ce modèle

Le modèle de Caselles et al. présente donc des problèmes

- à l'initialisation, et
- à la ré-initialisation.

Principe et inconvénients des modèles antérieurs

Inconvénients de ce modèle

Le modèle de Caselles et al. présente donc des problèmes

- à l'initialisation, et
- à la ré-initialisation.

On va à présent présenter le modèle proposé par Wang et He, qui est le résultat principal de l'article

Adaptive level set evolution starting with a constant fonction.

Principe et inconvénients des modèles antérieurs

Inconvénients de ce modèle

Le modèle de Caselles et al. présente donc des problèmes

- à l'initialisation, et
- à la ré-initialisation.

On va à présent présenter le modèle proposé par Wang et He, qui est le résultat principal de l'article

Adaptive level set evolution starting with a constant fonction.

Comme l'indique le titre de l'article, la fonction initiale utilisée sera constante, ce qui règlera le problème de l'initialisation.

Plan

1 Principe et inconvénients des modèles antérieurs
- Le modèle des contours actifs
- L'approche level-set des contours actifs
- Présentation d'un modèle antérieur
- Inconvénients de ce modèle

2 Présentation du nouveau modèle
- La force de guidage F_{adapt}
- La force de régularisation F_{reg}

3 Implémentation du nouveau modèle et résultats expérimentaux

Présentation du nouveau modèle

Le nouveau modèle donné par Wang et He dans [2] est toujours un modèle basé sur l'approche level-set mais qui abandonne le cadre des courbes d'évolutions.

Présentation du nouveau modèle

Dans ce modèle, l'évolution de la fonction level-set u est contrôlée par les deux forces F_{adapt} et F_{reg} *via* l'EDP suivante :

Présentation du nouveau modèle

Dans ce modèle, l'évolution de la fonction level-set u est contrôlée par les deux forces F_{adapt} et F_{reg} *via* l'EDP suivante :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha F_{\text{adapt}} + \beta F_{\text{reg}}$$

Présentation du nouveau modèle

Dans ce modèle, l'évolution de la fonction level-set u est contrôlée par les deux forces F_{adapt} et F_{reg} *via* l'EDP suivante :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha F_{\text{adapt}} + \beta F_{\text{reg}}$$

Force de guidage
vers les bords
à détecter

Présentation du nouveau modèle

Dans ce modèle, l'évolution de la fonction level-set u est contrôlée par les deux forces F_{adapt} et F_{reg} *via* l'EDP suivante :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha F_{\text{adapt}} + \beta F_{\text{reg}}$$

Force de régularisation des lignes de niveaux

Présentation du nouveau modèle

Dans ce modèle, l'évolution de la fonction level-set u est contrôlée par les deux forces F_{adapt} et F_{reg} *via* l'EDP suivante :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha F_{\text{adapt}} + \beta F_{\text{reg}}$$

constantes de pondération positives

Plan

1 Principe et inconvénients des modèles antérieurs
- Le modèle des contours actifs
- L'approche level-set des contours actifs
- Présentation d'un modèle antérieur
- Inconvénients de ce modèle

2 Présentation du nouveau modèle
- La force de guidage F_{adapt}
- La force de régularisation F_{reg}

3 Implémentation du nouveau modèle et résultats expérimentaux

Présentation du nouveau modèle

La force de guidage F_{adapt}

On considère toujours notre image

$$I : [0;a] \times [0;b] \to [0;255]$$

Présentation du nouveau modèle

La force de guidage F_{adapt}

On considère toujours notre image

$$I : [0;a] \times [0;b] \to [0;255]$$

Ainsi qu'une fonction lipschitzienne $u : [0;a] \times [0;b] \to \mathbb{R}$.

Présentation du nouveau modèle

La force de guidage F_{adapt}

Posons quelques notations.

Présentation du nouveau modèle

La force de guidage F_{adapt}

Posons quelques notations. Étant donné un borélien $A \subset [0;a] \times [0;b]$, on note :

Présentation du nouveau modèle

La force de guidage F_{adapt}

Posons quelques notations. Étant donné un borélien $A \subset [0;a] \times [0;b]$, on note :

- $\Omega \overset{\text{déf}}{=} [0;a] \times [0;b]$.

Présentation du nouveau modèle

La force de guidage F_{adapt}

Posons quelques notations. Étant donné un borélien $A \subset [0;a] \times [0;b]$, on note :

- $\Omega \overset{\text{déf}}{=} [0;a] \times [0;b]$.
- $|A|$ la mesure de Lebesgue de l'ensemble A. ($0 \leq |A| \leq ab$)

Présentation du nouveau modèle

La force de guidage F_{adapt}

Posons quelques notations. Étant donné un borélien $A \subset [0;a] \times [0;b]$, on note :

- $\Omega \overset{\text{déf}}{=} [0;a] \times [0;b]$.
- $|A|$ la mesure de Lebesgue de l'ensemble A. ($0 \leq |A| \leq ab$)
- La valeur moyenne de la fonction u sur l'ensemble A (si $|A| \neq 0$) :

$$\oint_A u \overset{\text{déf}}{=} \frac{1}{|A|} \int_A u.$$

Présentation du nouveau modèle

La force de guidage F_{adapt}

- La fonction signe : sign : $\mathbb{R} \to \{-1, 0, 1\}$,

$$\text{sign}\,(x) = \begin{cases} +1 & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ -1 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Présentation du nouveau modèle

La force de guidage F_{adapt}

On pose à présent les deux ensembles

$$A_+ \overset{\text{déf}}{=} \{(x,y) \in [0;a] \times [0;b] \ / \ u(x,y) \geq 0\}$$

Présentation du nouveau modèle

La force de guidage F_{adapt}

On pose à présent les deux ensembles

$$A_+ \overset{\text{déf}}{=} \{(x,y) \in [0;a] \times [0;b] \ / \ u(x,y) \geq 0\}$$

$$A_- \overset{\text{déf}}{=} \{(x,y) \in [0;a] \times [0;b] \ / \ u(x,y) \leq 0\}.$$

Présentation du nouveau modèle

La force de guidage F_{adapt}

On pose à présent les deux ensembles

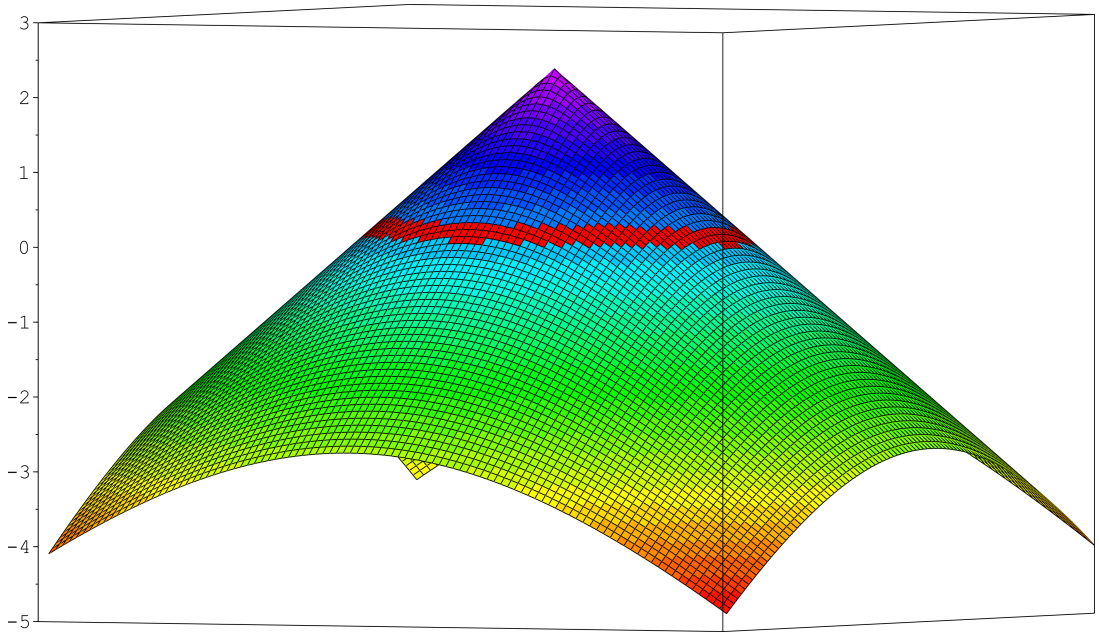
$$A_+ \overset{\text{déf}}{=} \{(x,y) \in [0;a] \times [0;b] \ / \ u(x,y) \geq 0\}$$

$$A_- \overset{\text{déf}}{=} \{(x,y) \in [0;a] \times [0;b] \ / \ u(x,y) \leq 0\}.$$

Par exemple, si u est la fonction de distance signée d'un cercle,

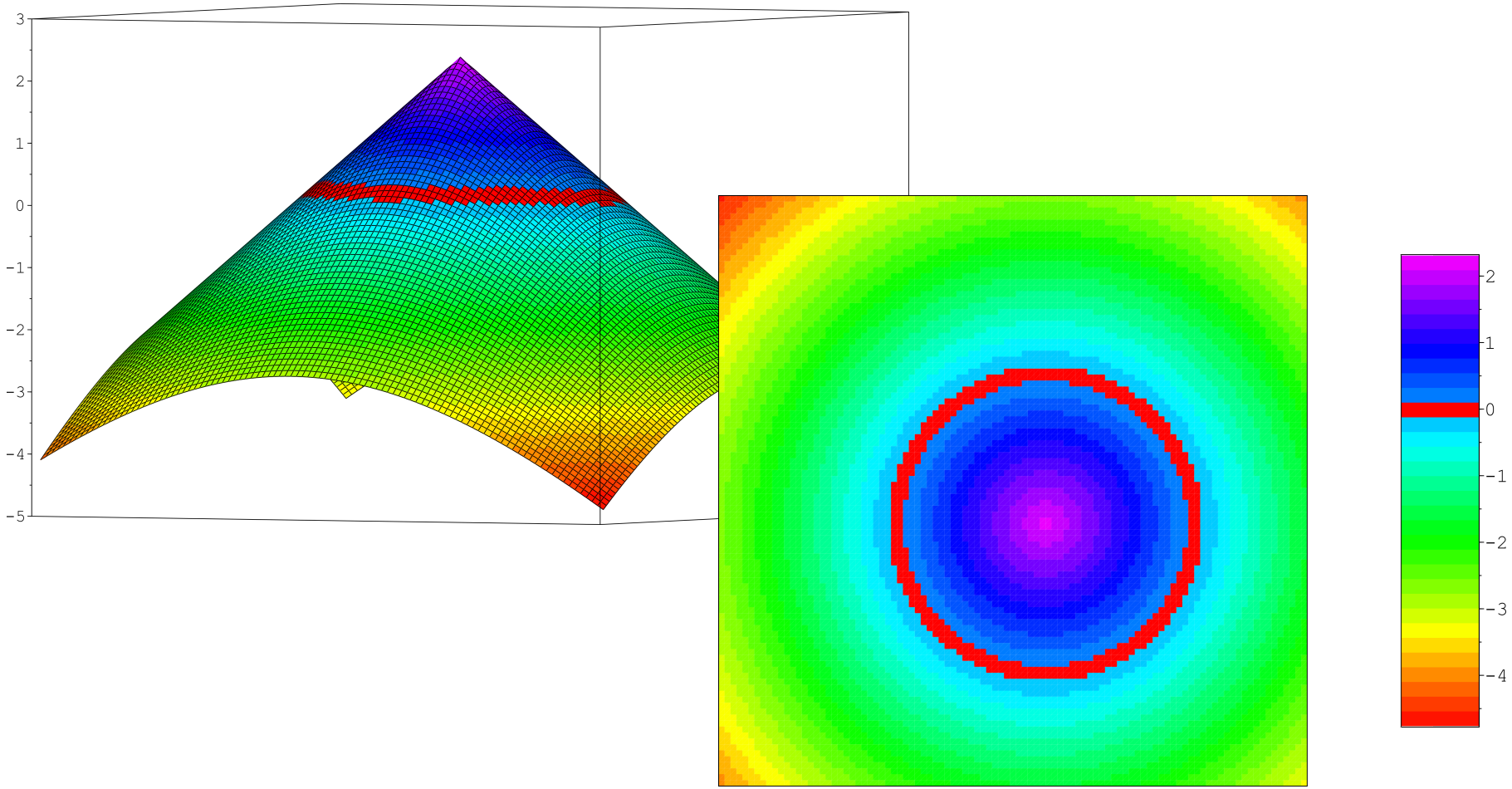
Présentation du nouveau modèle

La force de guidage F_{adapt}



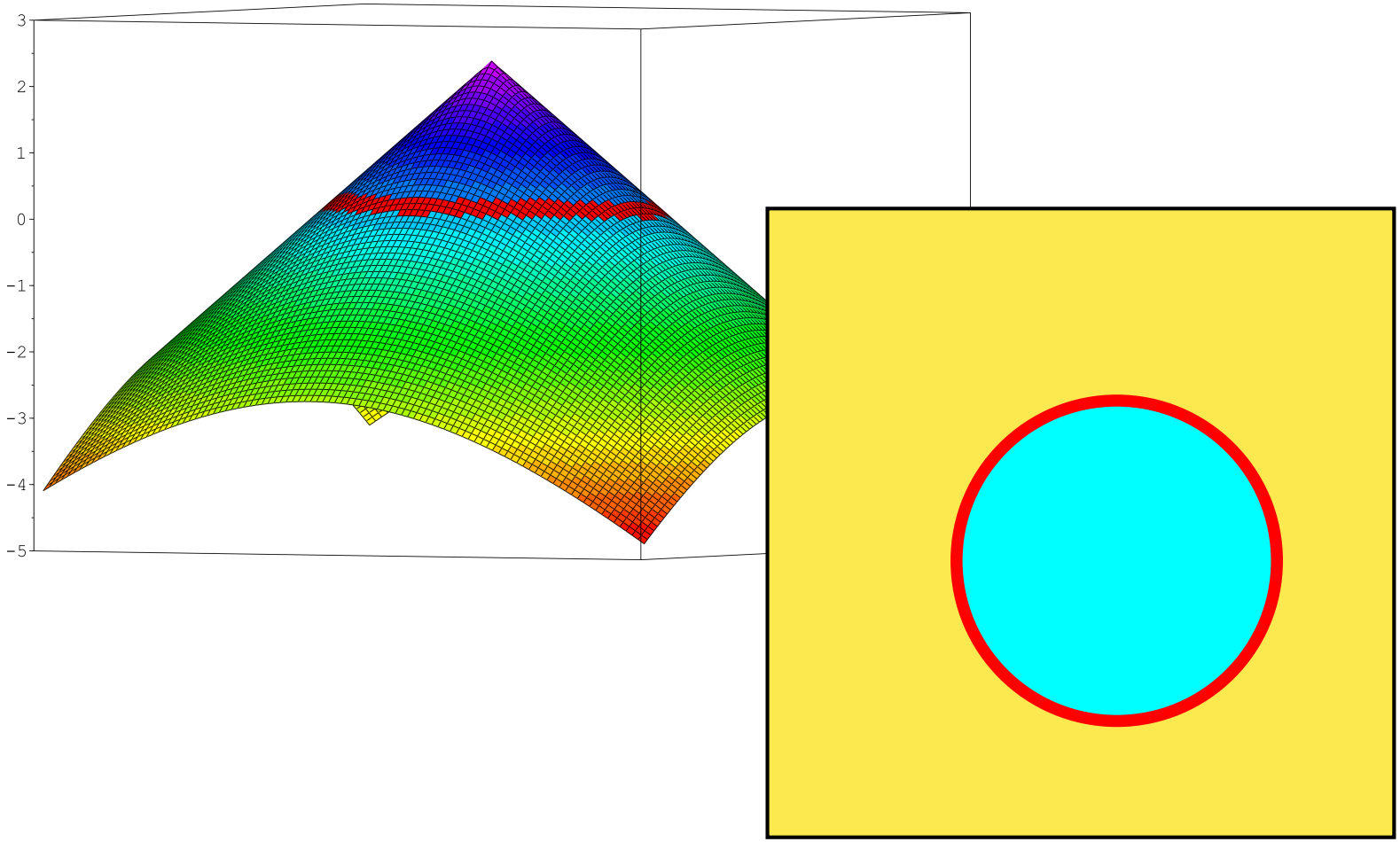
Présentation du nouveau modèle

La force de guidage F_{adapt}



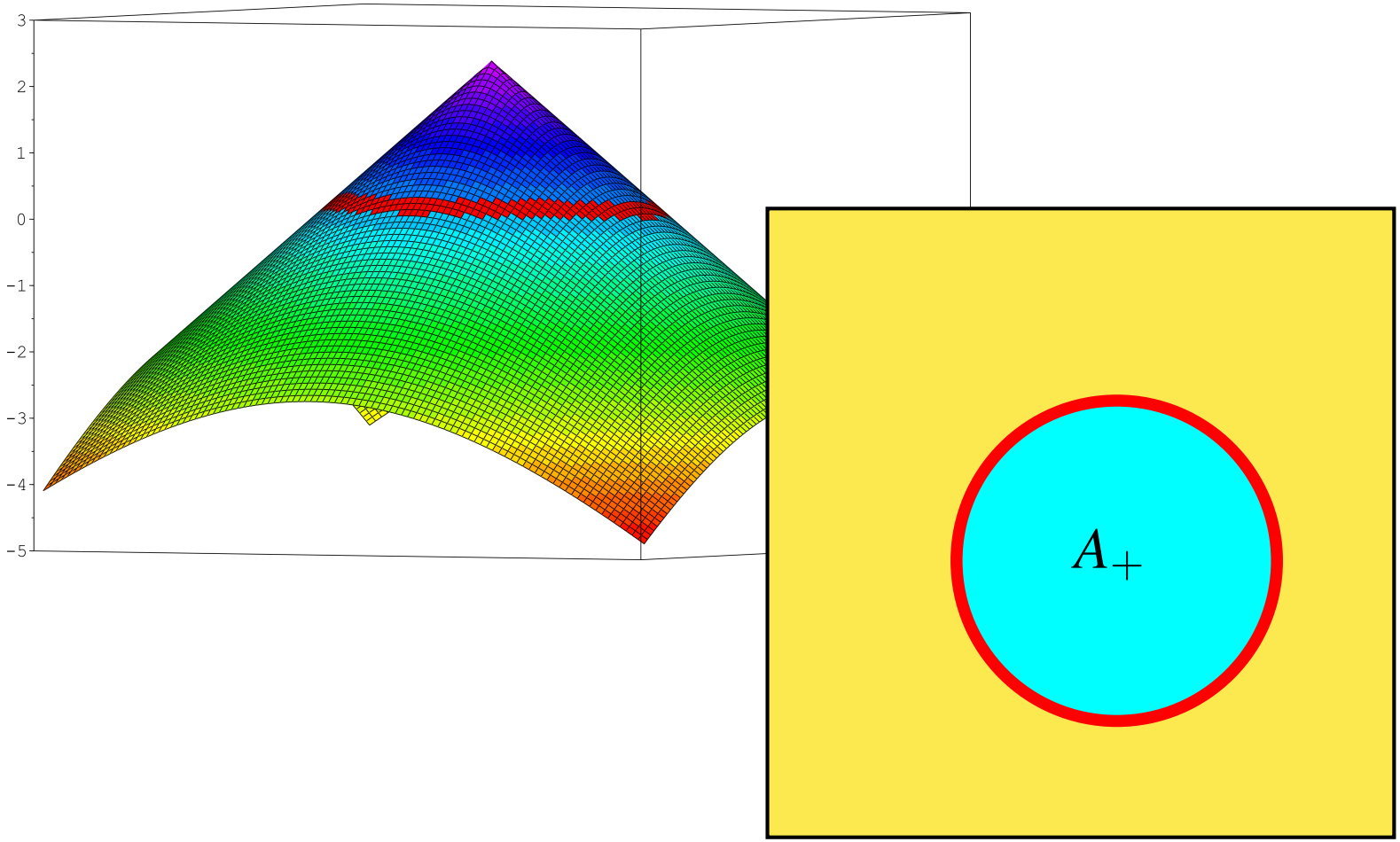
Présentation du nouveau modèle

La force de guidage F_{adapt}



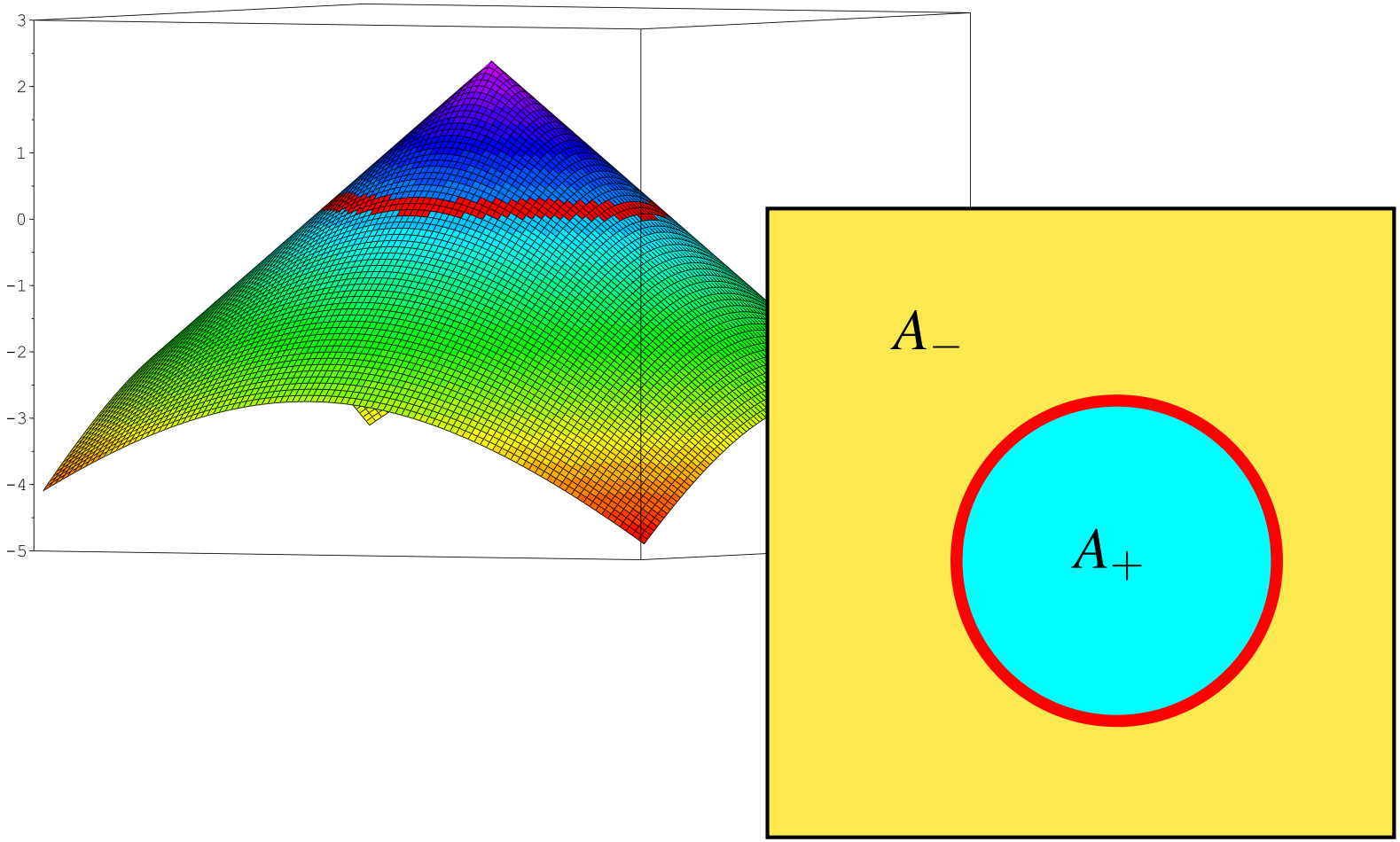
Présentation du nouveau modèle

La force de guidage F_{adapt}



Présentation du nouveau modèle

La force de guidage F_{adapt}



Présentation du nouveau modèle

La force de guidage F_{adapt}

On peut maintenant commencer à définir les éléments de la force de guidage F_{adapt}.

Présentation du nouveau modèle

La force de guidage F_{adapt}

On peut maintenant commencer à définir les éléments de la force de guidage F_{adapt}. Posons les deux fonctionnelles suivantes :

Présentation du nouveau modèle

La force de guidage F_{adapt}

On peut maintenant commencer à définir les éléments de la force de guidage F_{adapt}. Posons les deux fonctionnelles suivantes :

$$c_+(u) \overset{\text{déf}}{=} \begin{cases} \oint_{A_+} I & \text{si } |A_+| > 0, \\ \oint_{\Omega} I & \text{si } |A_+| = 0. \end{cases}$$

Présentation du nouveau modèle

La force de guidage F_{adapt}

On peut maintenant commencer à définir les éléments de la force de guidage F_{adapt}. Posons les deux fonctionnelles suivantes :

$$c_+(u) \overset{\text{déf}}{=} \begin{cases} \oint_{A_+} I & \text{si } |A_+| > 0, \\ \oint_{\Omega} I & \text{si } |A_+| = 0. \end{cases}$$

$$c_-(u) \overset{\text{déf}}{=} \begin{cases} \oint_{A_-} I & \text{si } |A_-| > 0, \\ \oint_{\Omega} I & \text{si } |A_-| = 0. \end{cases}$$

Présentation du nouveau modèle

La force de guidage F_{adapt}

Enfin, on prend

$$f\left(I,u\right)\left(x,y\right) \overset{\text{déf}}{=} \text{sign}\left(I\left(x,y\right) - \frac{c_+ + c_-}{2}\right)$$

Présentation du nouveau modèle

La force de guidage F_{adapt}

Enfin, on prend

$$f\left(I,u\right)\left(x,y\right) \overset{\text{déf}}{=} \text{sign}\left(I\left(x,y\right) - \frac{c_+ + c_-}{2}\right)$$

Les valeurs de c_+ et c_- étant intrinsèques à l'image I et à la fonction u considérées, trois cas de figure s'offrent à nous :

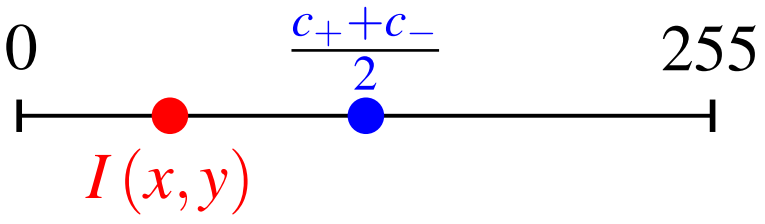
Présentation du nouveau modèle

La force de guidage F_{adapt}

Enfin, on prend

$$f(I,u)(x,y) \overset{\text{déf}}{=} \text{sign}\left(I(x,y) - \frac{c_+ + c_-}{2}\right)$$

Les valeurs de c_+ et c_- étant intrinsèques à l'image I et à la fonction u considérées, trois cas de figure s'offrent à nous :



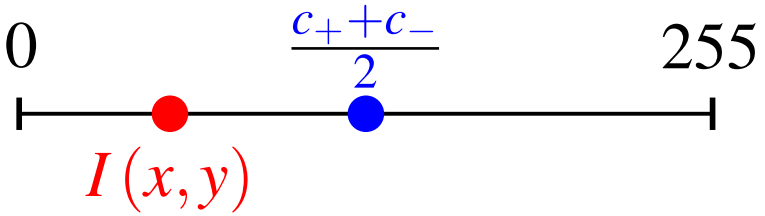
Présentation du nouveau modèle

La force de guidage F_{adapt}

Enfin, on prend

$$f(I,u)(x,y) \overset{\text{déf}}{=} \text{sign}\left(I(x,y) - \frac{c_+ + c_-}{2}\right)$$

Les valeurs de c_+ et c_- étant intrinsèques à l'image I et à la fonction u considérées, trois cas de figure s'offrent à nous :



$$f(I,u)(x,y) = -1$$

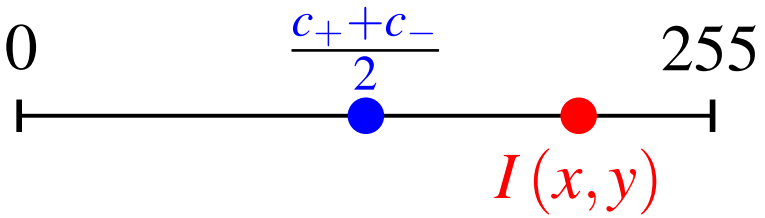
Présentation du nouveau modèle

La force de guidage F_{adapt}

Enfin, on prend

$$f(I,u)(x,y) \overset{\text{déf}}{=} \text{sign}\left(I(x,y) - \frac{c_+ + c_-}{2}\right)$$

Les valeurs de c_+ et c_- étant intrinsèques à l'image I et à la fonction u considérées, trois cas de figure s'offrent à nous :



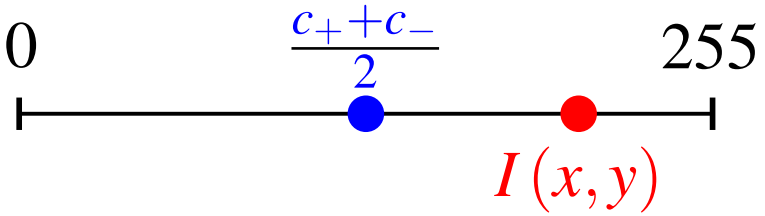
Présentation du nouveau modèle

La force de guidage F_{adapt}

Enfin, on prend

$$f(I,u)(x,y) \overset{\text{déf}}{=} \text{sign}\left(I(x,y) - \frac{c_+ + c_-}{2}\right)$$

Les valeurs de c_+ et c_- étant intrinsèques à l'image I et à la fonction u considérées, trois cas de figure s'offrent à nous :



$$f(I,u)(x,y) = 1$$

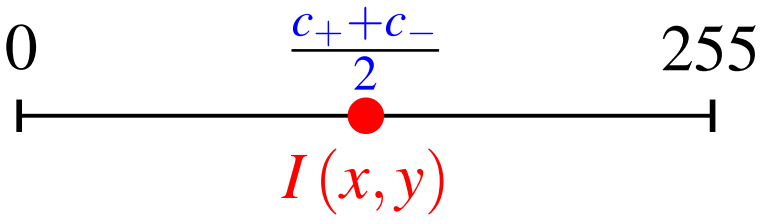
Présentation du nouveau modèle

La force de guidage F_{adapt}

Enfin, on prend

$$f(I,u)(x,y) \overset{\text{déf}}{=} \text{sign}\left(I(x,y) - \frac{c_+ + c_-}{2}\right)$$

Les valeurs de c_+ et c_- étant intrinsèques à l'image I et à la fonction u considérées, trois cas de figure s'offrent à nous :



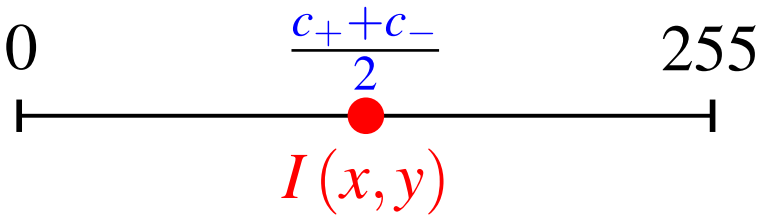
Présentation du nouveau modèle

La force de guidage F_{adapt}

Enfin, on prend

$$f(I,u)(x,y) \overset{\text{déf}}{=} \text{sign}\left(I(x,y) - \frac{c_+ + c_-}{2}\right)$$

Les valeurs de c_+ et c_- étant intrinsèques à l'image I et à la fonction u considérées, trois cas de figure s'offrent à nous :



$$f(I,u)(x,y) = 0$$

Présentation du nouveau modèle

La force de guidage F_{adapt}

Prenons un exemple simple pour voir les propriétés de cette fonction f.

Présentation du nouveau modèle

La force de guidage F_{adapt}

Prenons un exemple simple pour voir les propriétés de cette fonction f. On choisit pour I :

Présentation du nouveau modèle

La force de guidage F_{adapt}

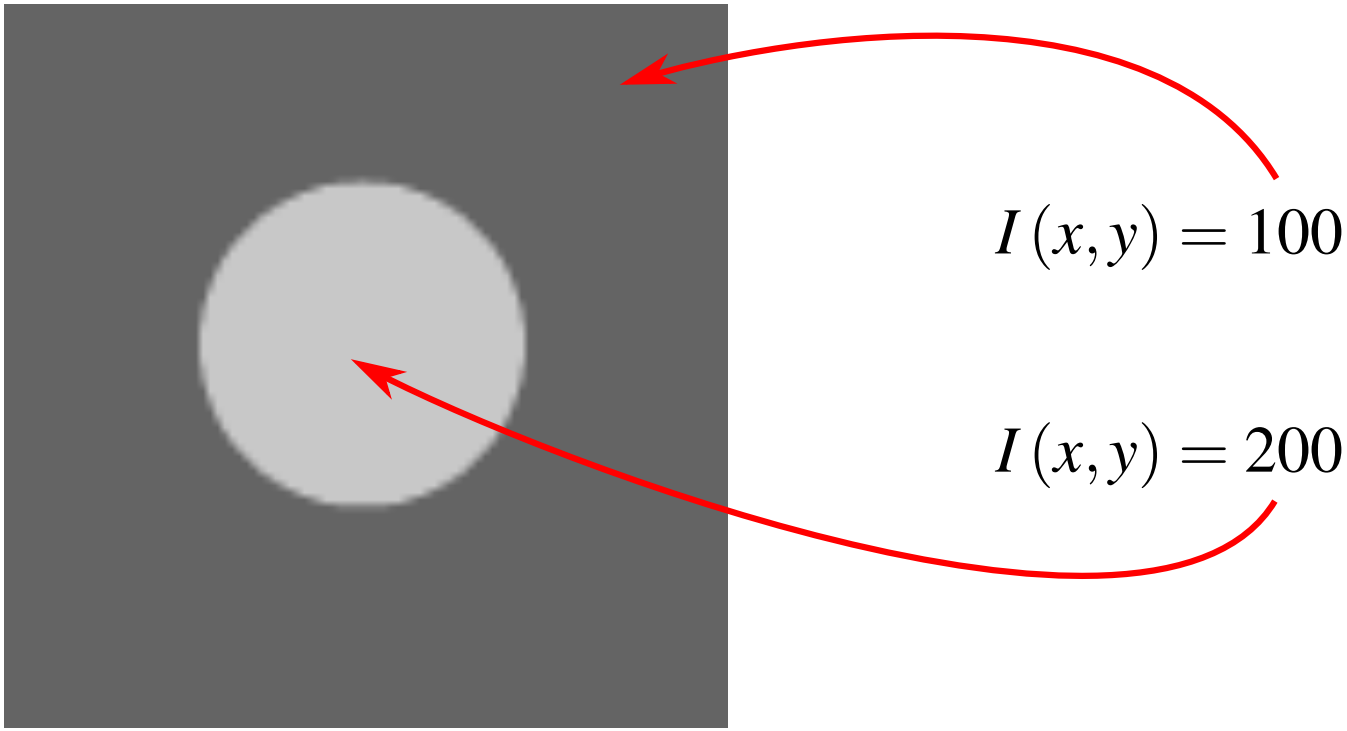
Prenons un exemple simple pour voir les propriétés de cette fonction f. On choisit pour I :

$$I(x, y) = 100$$

Présentation du nouveau modèle

La force de guidage F_{adapt}

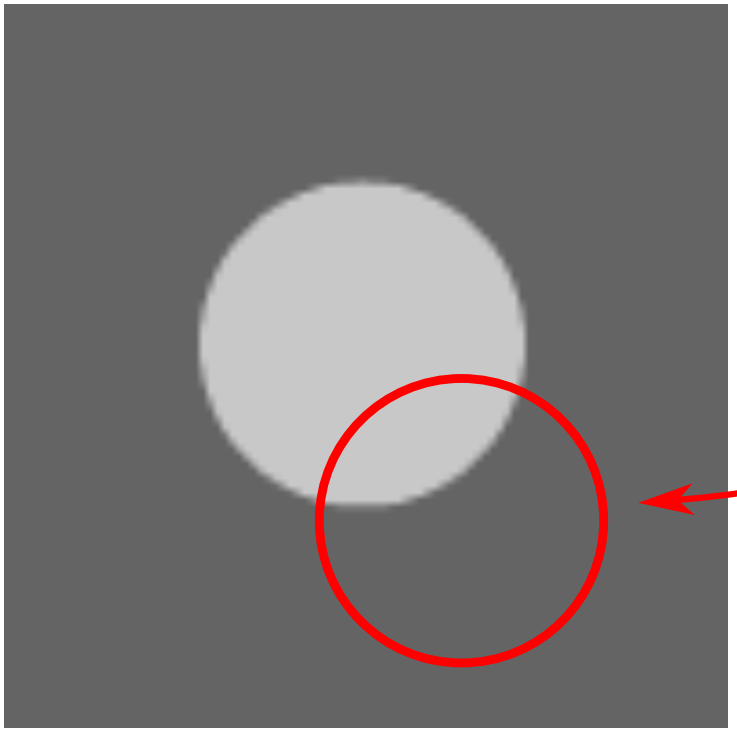
Prenons un exemple simple pour voir les propriétés de cette fonction f. On choisit pour I :



Présentation du nouveau modèle

La force de guidage F_{adapt}

Prenons un exemple simple pour voir les propriétés de cette fonction f. On choisit pour u :



La fonction distance signée d'un cercle inscrit dans l'image

Présentation du nouveau modèle

La force de guidage F_{adapt}

Soit $(x, y) \in \Omega$, on a

$$100 \leq I(x, y) \leq 200$$

Présentation du nouveau modèle

La force de guidage F_{adapt}

Soit $(x, y) \in \Omega$, on a

$$100 \leq I(x, y) \leq 200$$

$$100\,|A_+| \leq \int_{A_+} I(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \leq 200\,|A_+|$$

Présentation du nouveau modèle

La force de guidage F_{adapt}

Soit $(x, y) \in \Omega$, on a

$$100 \leq I(x, y) \leq 200$$

$$100\,|A_+| \leq \int_{A_+} I(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \leq 200\,|A_+|$$

$$100 \leq \oint_{A_+} I(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \leq 200$$

Présentation du nouveau modèle

La force de guidage F_{adapt}

Soit $(x, y) \in \Omega$, on a

$$100 \leq I(x, y) \leq 200$$

$$100\,|A_+| \leq \int_{A_+} I(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \leq 200\,|A_+|$$

$$100 \leq \oint_{A_+} I(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \leq 200$$

$$\boxed{100 \leq c_+ \leq 200.}$$

Présentation du nouveau modèle

La force de guidage F_{adapt}

De même,

$$100 \leq c_{-} \leq 200.$$

Présentation du nouveau modèle

La force de guidage F_{adapt}

De même,

$$100 \leq c_- \leq 200.$$

Donc

$$\boxed{100 \leq \frac{c_+ + c_-}{2} \leq 200.}$$

Présentation du nouveau modèle

La force de guidage F_{adapt}

En fait, on ne peut pas avoir

$$c_+ = c_- = 100$$

Présentation du nouveau modèle

La force de guidage F_{adapt}

En fait, on ne peut pas avoir

$$c_+ = c_- = 100$$

ni

$$c_+ = c_- = 200$$

Présentation du nouveau modèle

La force de guidage F_{adapt}

En fait, on ne peut pas avoir

$$c_+ = c_- = 100$$

ni

$$c_+ = c_- = 200$$

et donc

$$\boxed{100 \lneq \frac{c_+ + c_-}{2} \lneq 200.}$$

Présentation du nouveau modèle

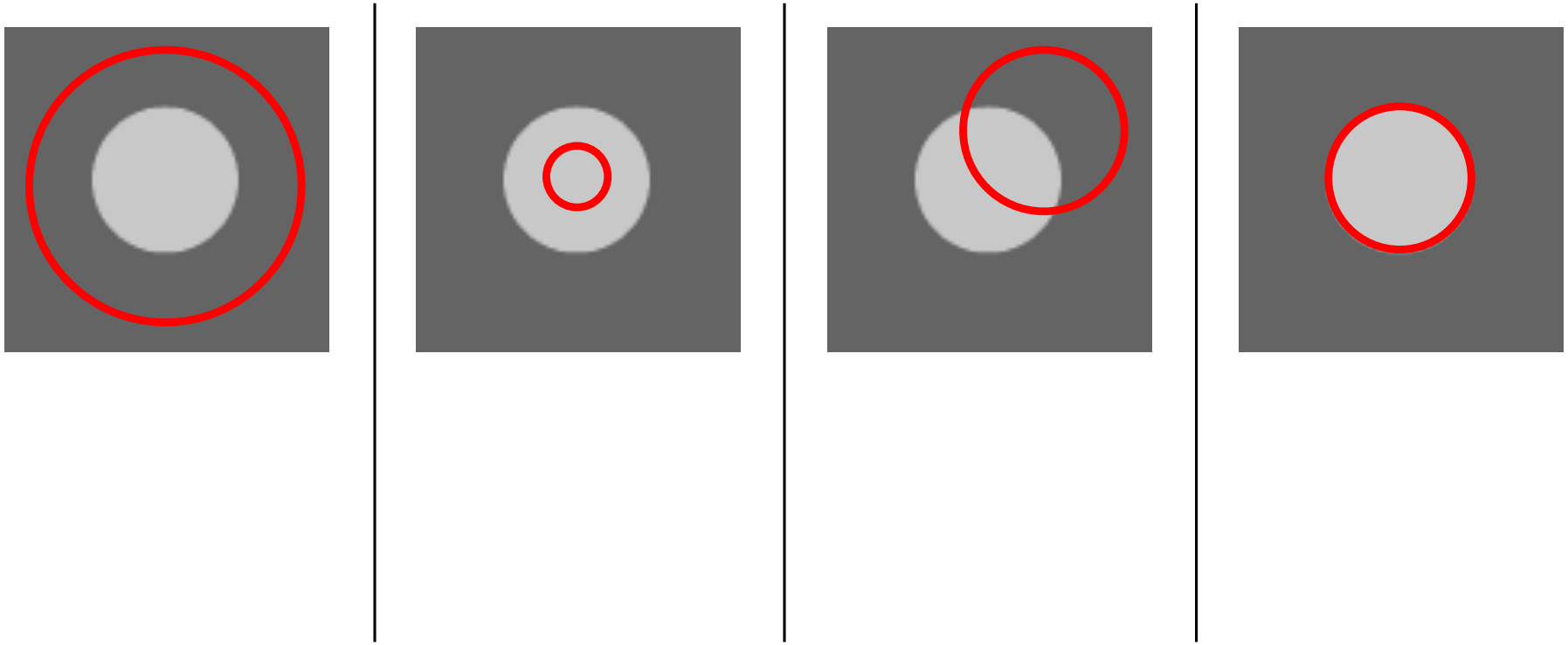
La force de guidage F_{adapt}

En effet, en considérant tous les cas de figure possibles, c_+ et c_- ne peuvent pas être simultanément égaux à 200 ou100 :

Présentation du nouveau modèle

La force de guidage F_{adapt}

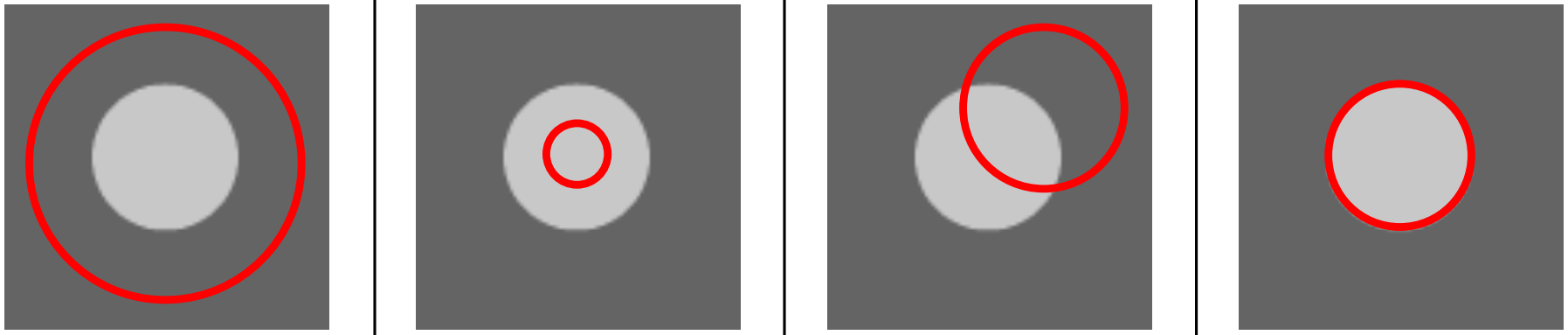
En effet, en considérant tous les cas de figure possibles, c_+ et c_- ne peuvent pas être simultanément égaux à 200 ou100 :



Présentation du nouveau modèle

La force de guidage F_{adapt}

En effet, en considérant tous les cas de figure possibles, c_+ et c_- ne peuvent pas être simultanément égaux à 200 ou100 :



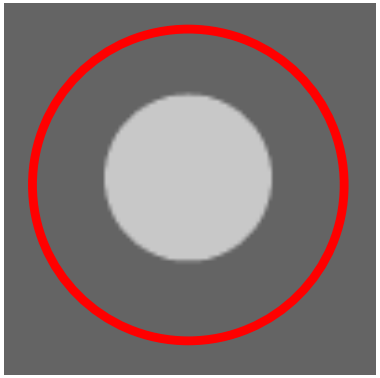
$100 < c_+ < 200$

$c_- = 100$

Présentation du nouveau modèle

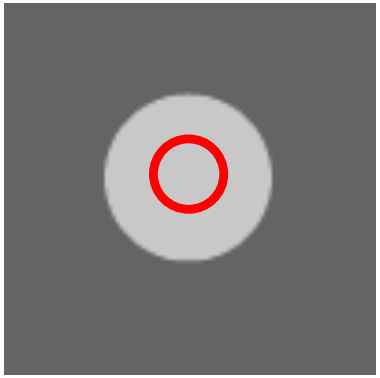
La force de guidage F_{adapt}

En effet, en considérant tous les cas de figure possibles, c_+ et c_- ne peuvent pas être simultanément égaux à 200 ou100 :



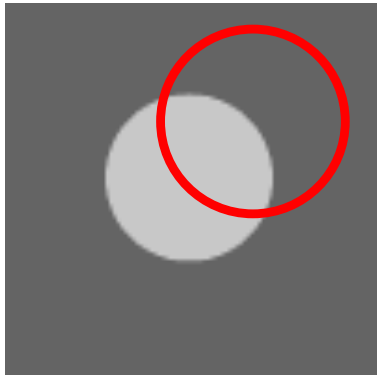
$100 < c_+ < 200$

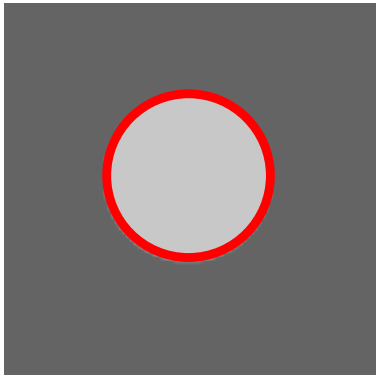
$c_- = 100$



$c_+ = 200$

$100 < c_- < 200$

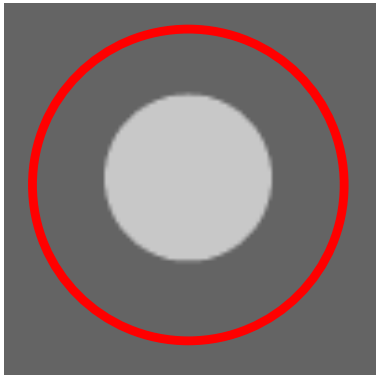




Présentation du nouveau modèle

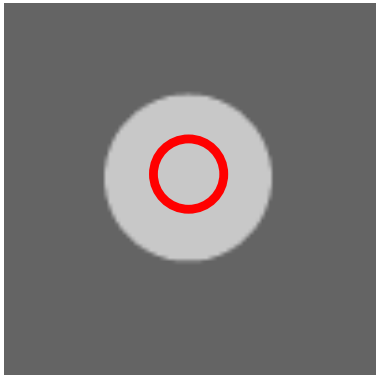
La force de guidage F_{adapt}

En effet, en considérant tous les cas de figure possibles, c_+ et c_- ne peuvent pas être simultanément égaux à 200 ou100 :



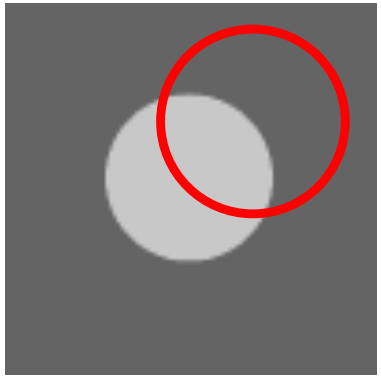
$100 < c_+ < 200$

$c_- = 100$



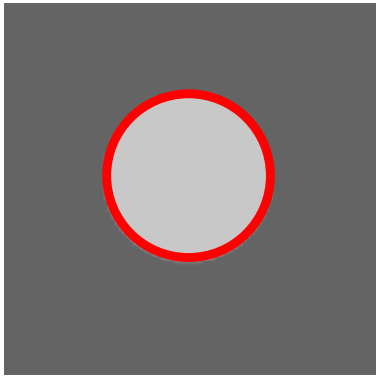
$c_+ = 200$

$100 < c_- < 200$



$100 < c_+ < 200$

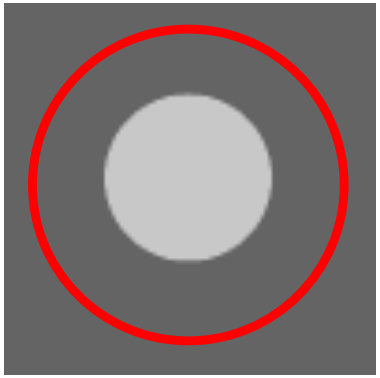
$100 < c_- < 200$



Présentation du nouveau modèle

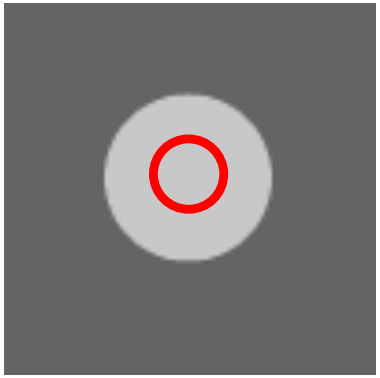
La force de guidage F_{adapt}

En effet, en considérant tous les cas de figure possibles, c_+ et c_- ne peuvent pas être simultanément égaux à 200 ou100 :



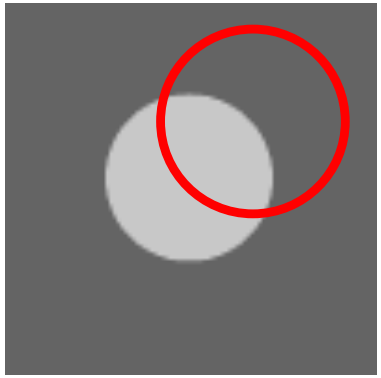
$100 < c_+ < 200$

$c_- = 100$



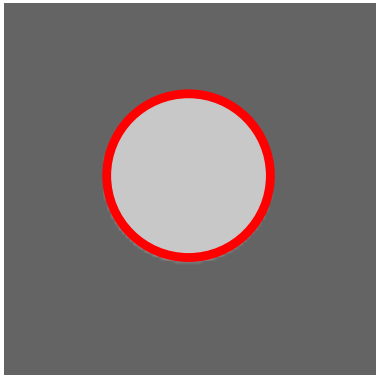
$c_+ = 200$

$100 < c_- < 200$



$100 < c_+ < 200$

$100 < c_- < 200$



$c_+ = 200$

$c_- = 100$

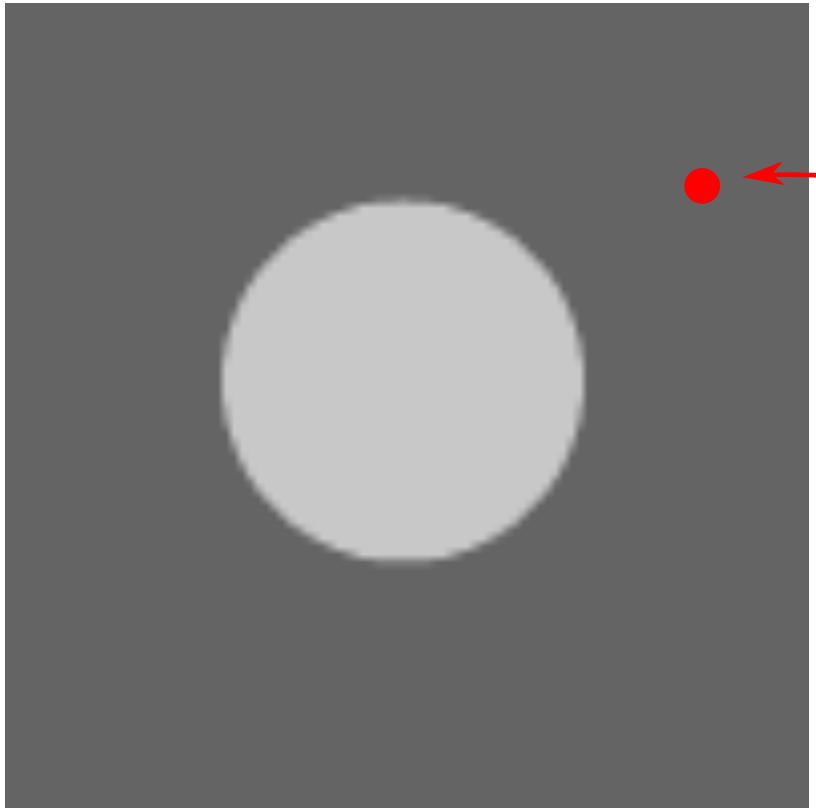
Présentation du nouveau modèle

La force de guidage F_{adapt}

$$100 < \frac{c_+ + c_-}{2} < 200$$

Présentation du nouveau modèle

La force de guidage F_{adapt}

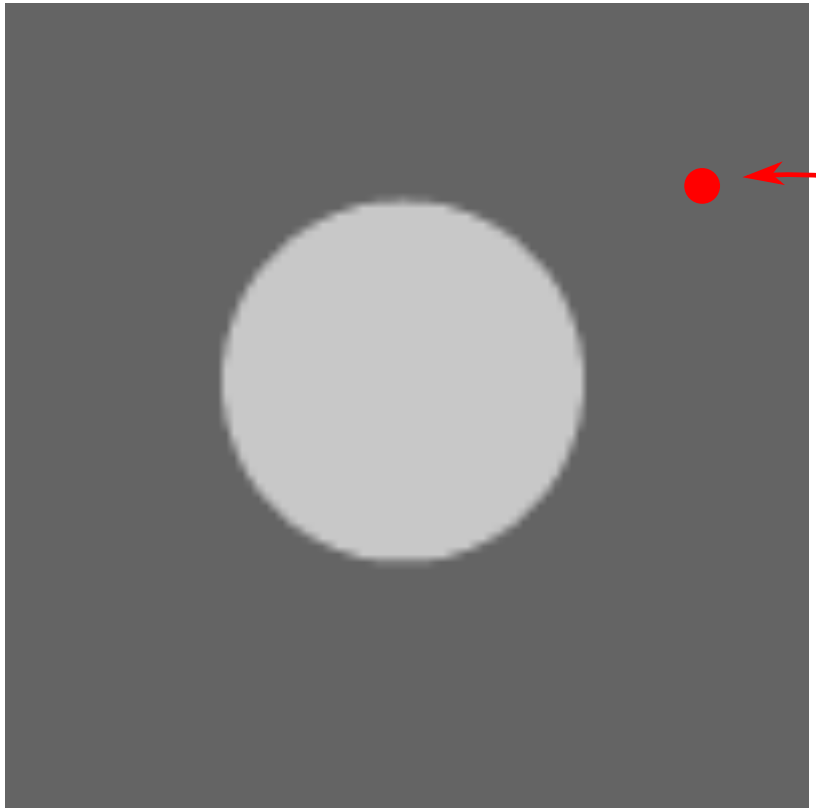


$$100 < \frac{c_+ + c_-}{2} < 200$$

(x, y)

Présentation du nouveau modèle

La force de guidage F_{adapt}



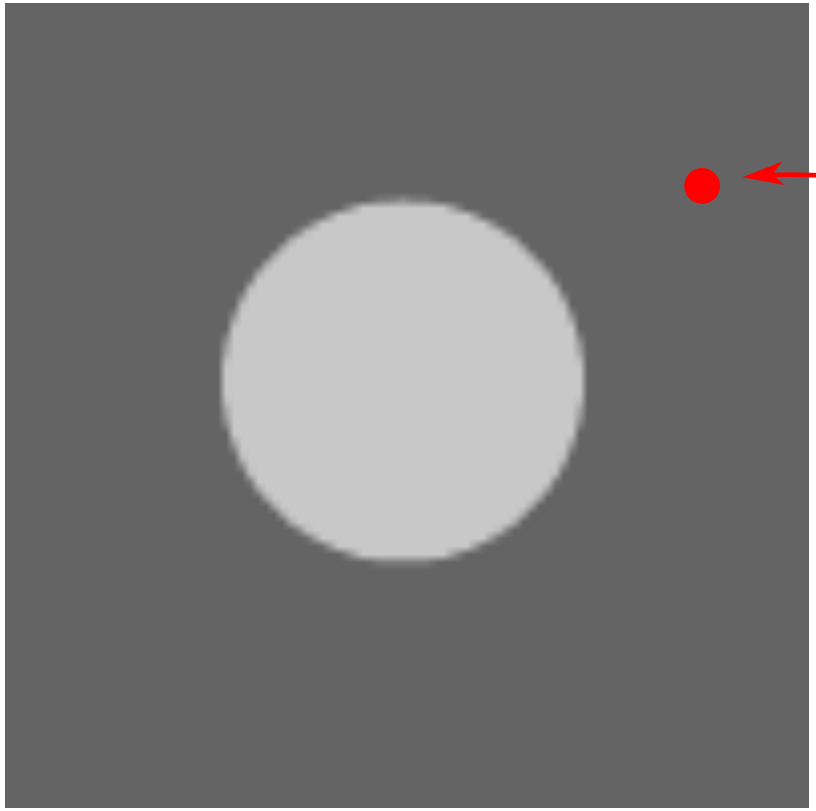
$$100 < \frac{c_+ + c_-}{2} < 200$$

$$(x, y)$$

$$I(x, y) = 100$$

Présentation du nouveau modèle

La force de guidage F_{adapt}



$$100 < \frac{c_+ + c_-}{2} < 200$$

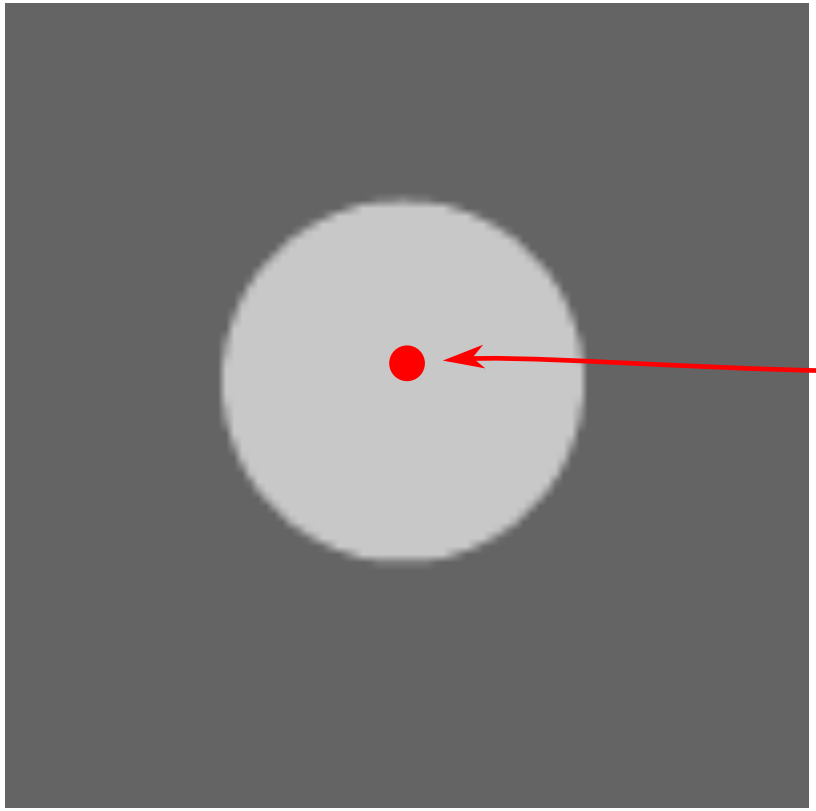
$$(x, y)$$

$$I(x, y) = 100$$

Donc $\boxed{f(I, u)(x, y) = -1}$

Présentation du nouveau modèle

La force de guidage F_{adapt}

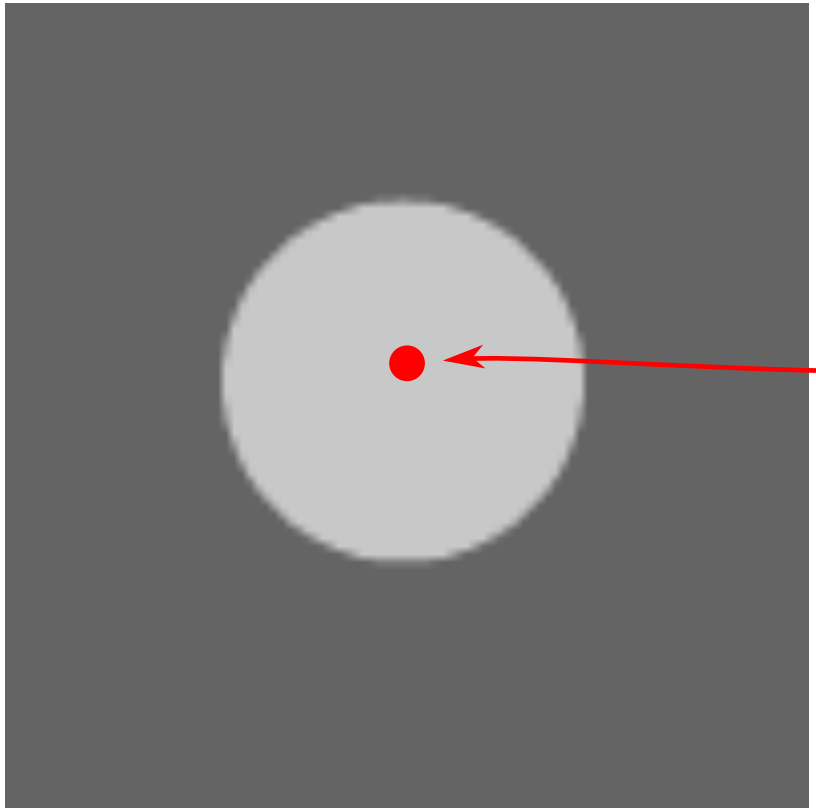


$$100 < \frac{c_+ + c_-}{2} < 200$$

(x, y)

Présentation du nouveau modèle

La force de guidage F_{adapt}



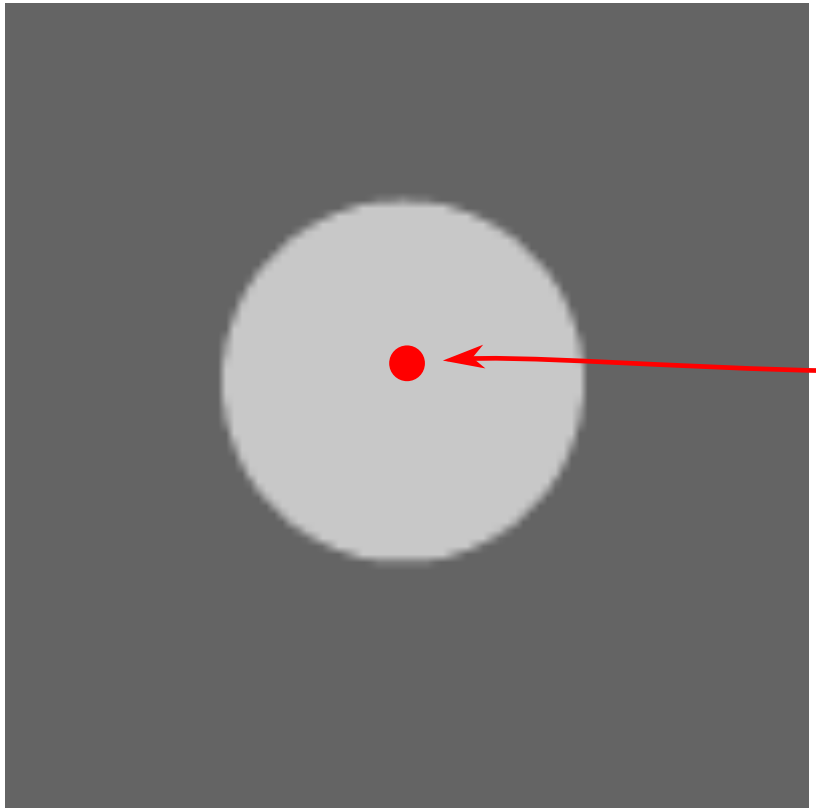
$$100 < \frac{c_+ + c_-}{2} < 200$$

$$(x, y)$$

$$I(x, y) = 200$$

Présentation du nouveau modèle

La force de guidage F_{adapt}



$$100 < \frac{c_+ + c_-}{2} < 200$$

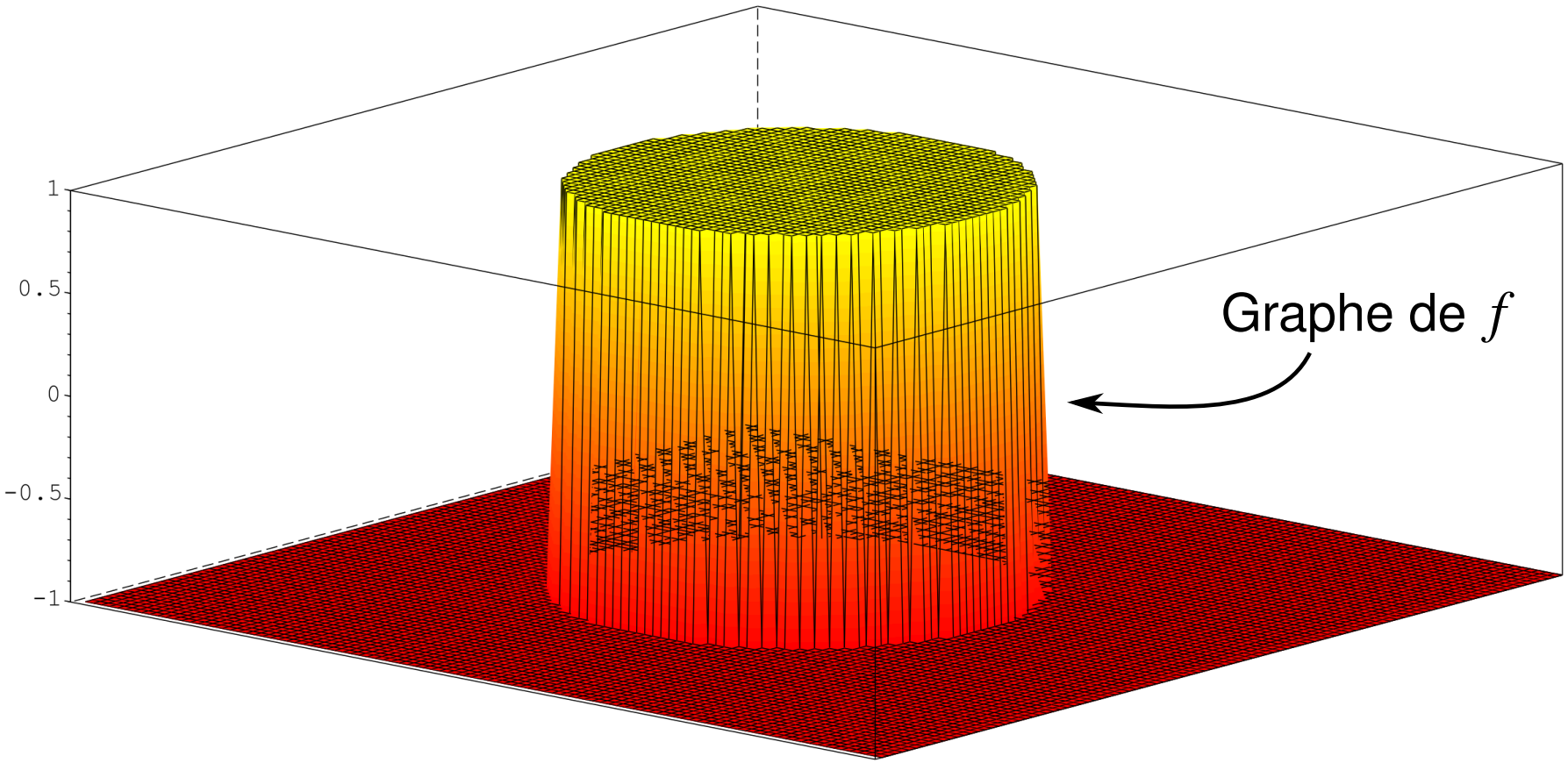
$$(x, y)$$

$$I(x, y) = 200$$

Donc $\boxed{f(I, u)(x, y) = 1}$

Présentation du nouveau modèle

La force de guidage F_{adapt}



Présentation du nouveau modèle

La force de guidage F_{adapt}

On peut à présent considérer l'EDP d'évolution

$$\frac{\partial u}{\partial t} = F_{\text{adapt}} \overset{\text{déf}}{=} g\left(|\nabla I|\right) f\left(I, u\right)$$

Présentation du nouveau modèle

La force de guidage F_{adapt}

On peut à présent considérer l'EDP d'évolution

$$\frac{\partial u}{\partial t} = F_{\text{adapt}} \overset{\text{déf}}{=} g\left(|\nabla I|\right) f\left(I, u\right)$$

où g est une fonction de stoppage comme on en a rencontré dans la première partie.

Présentation du nouveau modèle

La force de guidage F_{adapt}

On peut à présent considérer l'EDP d'évolution

$$\frac{\partial u}{\partial t} = F_{\text{adapt}} \overset{\text{déf}}{=} g\left(|\nabla I|\right) f\left(I, u\right)$$

où g est une fonction de stoppage comme on en a rencontré dans la première partie.

On munit cette EDP d'une condition au bords de type Neumann homogène,

Présentation du nouveau modèle

La force de guidage F_{adapt}

On peut à présent considérer l'EDP d'évolution

$$\frac{\partial u}{\partial t} = F_{\text{adapt}} \overset{\text{déf}}{=} g\left(|\nabla I|\right) f\left(I, u\right)$$

où g est une fonction de stoppage comme on en a rencontré dans la première partie.

On munit cette EDP d'une condition au bords de type Neumann homogène,

et d'une condition initiale $u\left(x, y, 0\right) \equiv \rho > 0$.

Présentation du nouveau modèle

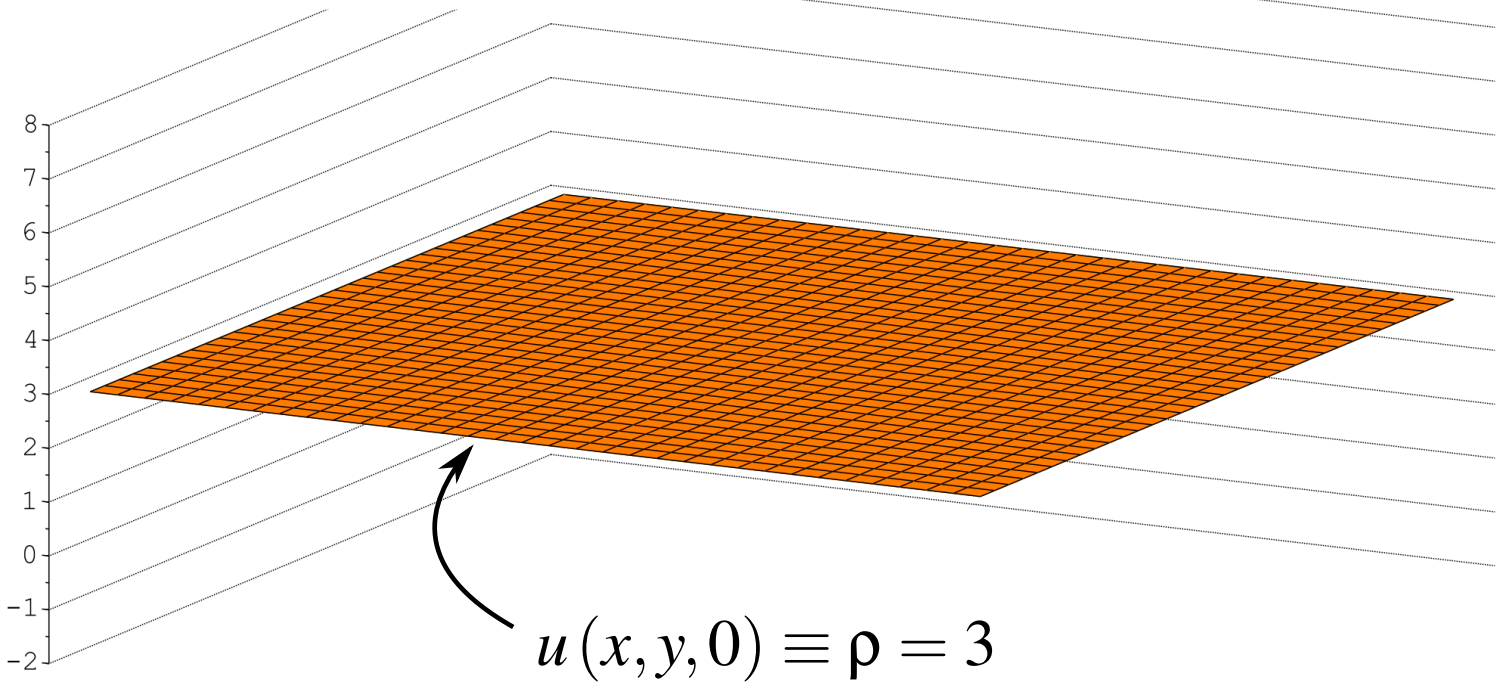
La force de guidage F_{adapt}

Regardons l'évolution de la fonction u lors de ces premiers instants.

Présentation du nouveau modèle

La force de guidage F_{adapt}

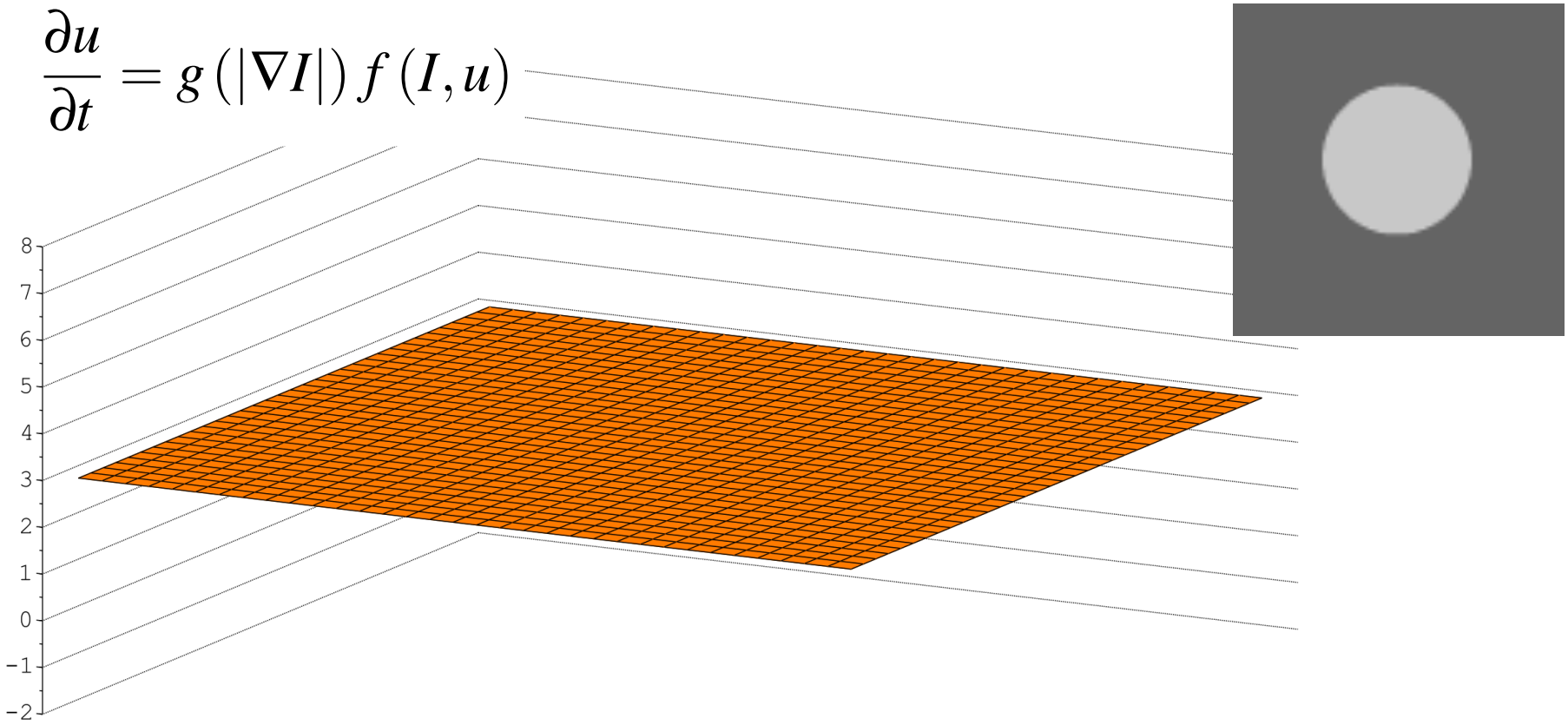
$$\frac{\partial u}{\partial t} = g\left(|\nabla I|\right) f\left(I, u\right)$$



Présentation du nouveau modèle

La force de guidage F_{adapt}

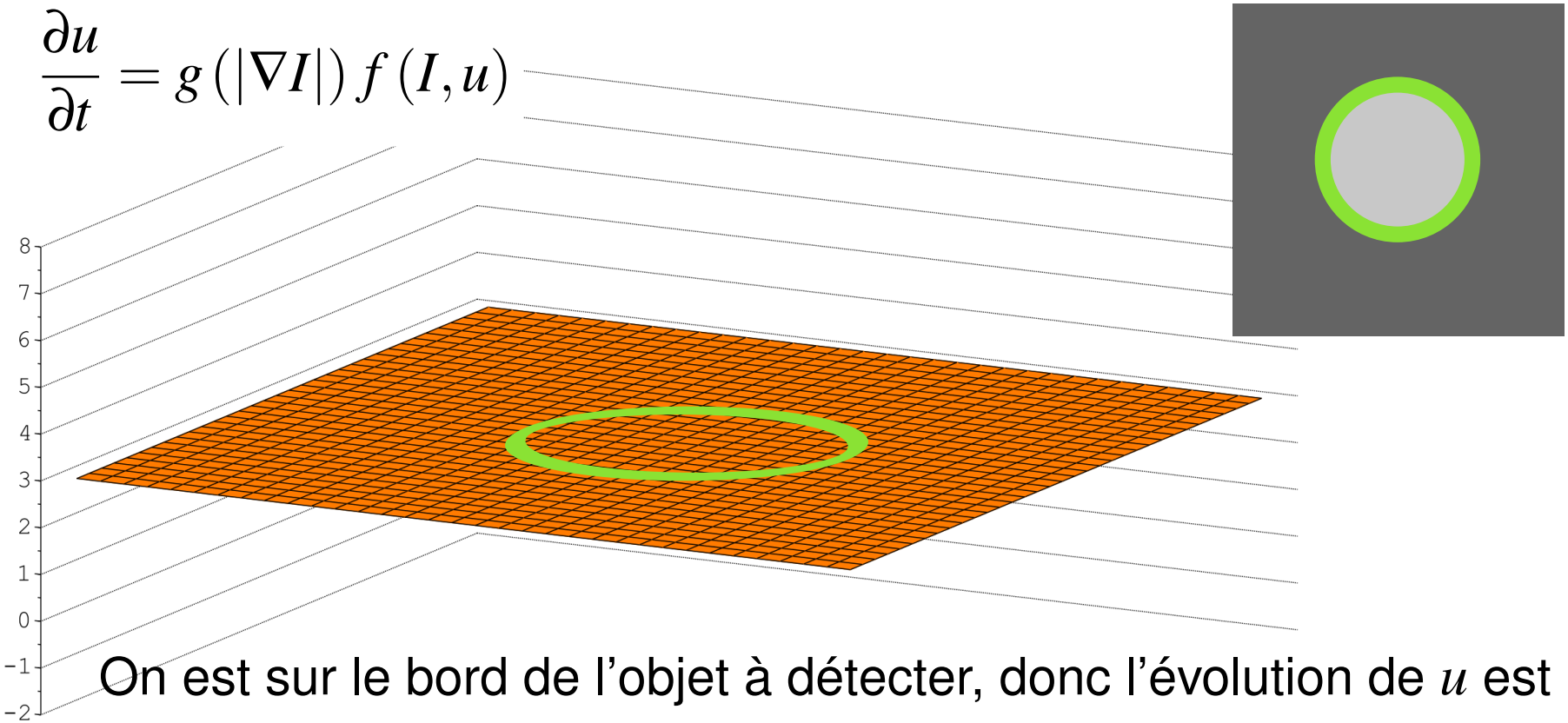
$$\frac{\partial u}{\partial t} = g\left(|\nabla I|\right) f\left(I, u\right)$$



Présentation du nouveau modèle

La force de guidage F_{adapt}

$$\frac{\partial u}{\partial t} = g\left(|\nabla I|\right) f\left(I, u\right)$$

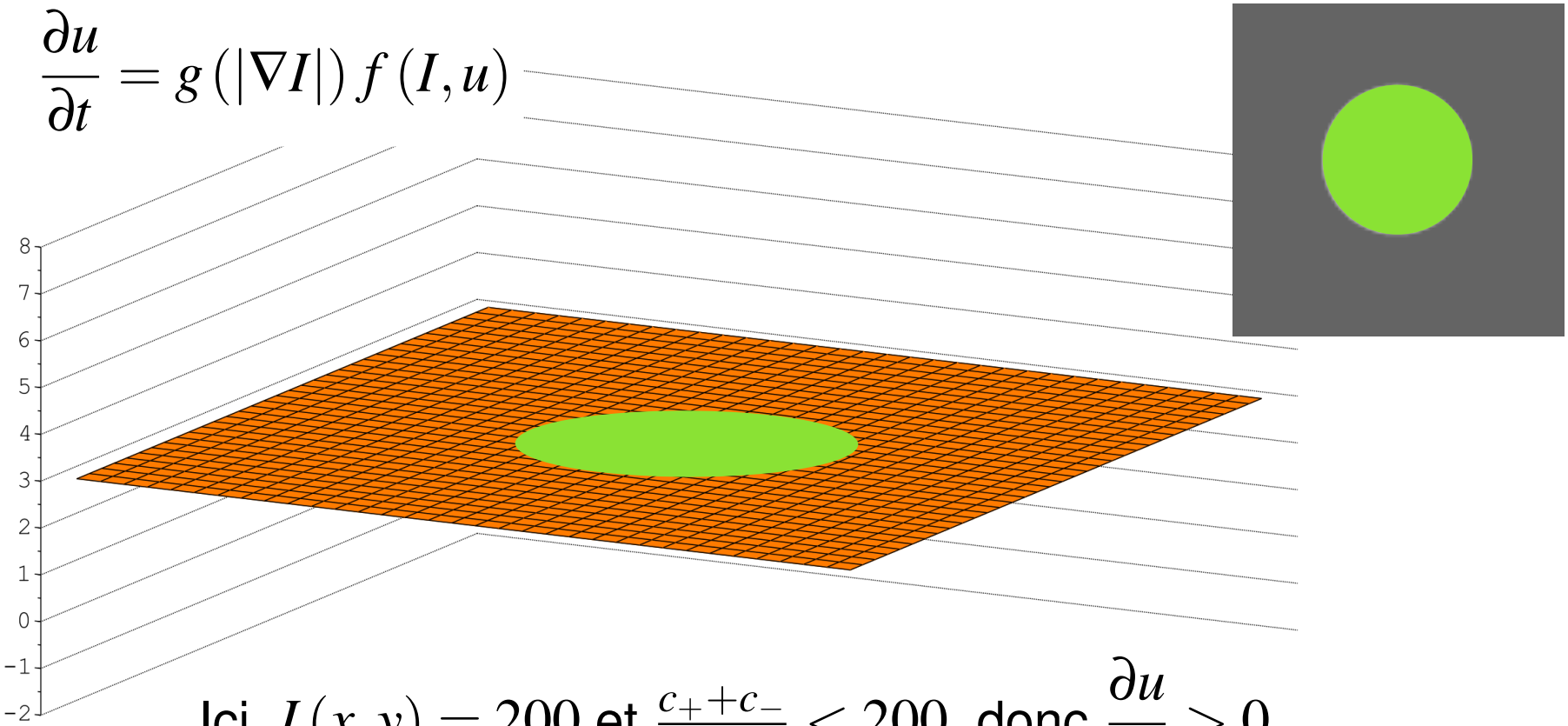


On est sur le bord de l'objet à détecter, donc l'évolution de u est neutralisée par la fonction g en ces points.

Présentation du nouveau modèle

La force de guidage F_{adapt}

$$\frac{\partial u}{\partial t} = g\left(|\nabla I|\right) f\left(I, u\right)$$

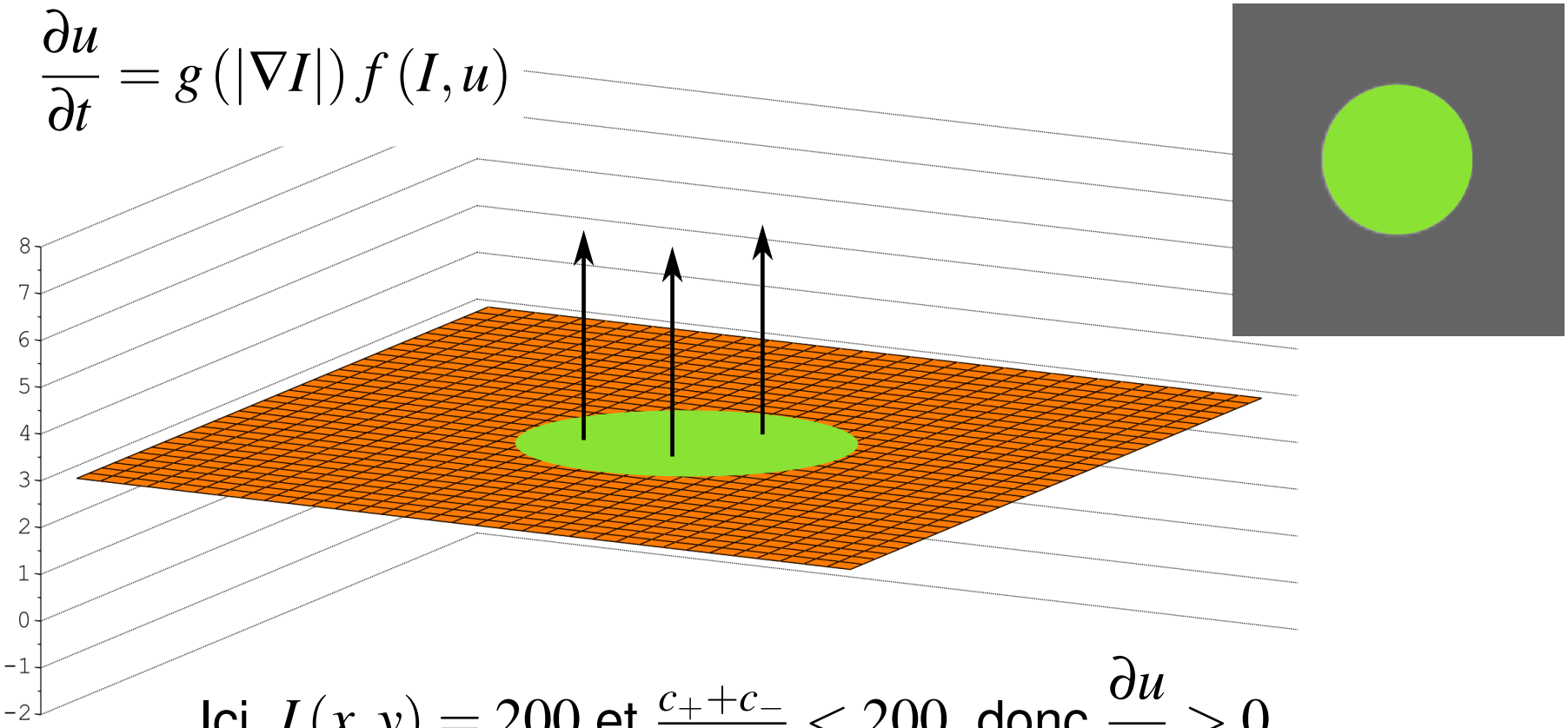


Ici, $I\left(x, y\right) = 200$ et $\frac{c_+ + c_-}{2} < 200$, donc $\dfrac{\partial u}{\partial t} > 0$.

Présentation du nouveau modèle

La force de guidage F_{adapt}

$$\frac{\partial u}{\partial t} = g\left(|\nabla I|\right) f\left(I, u\right)$$

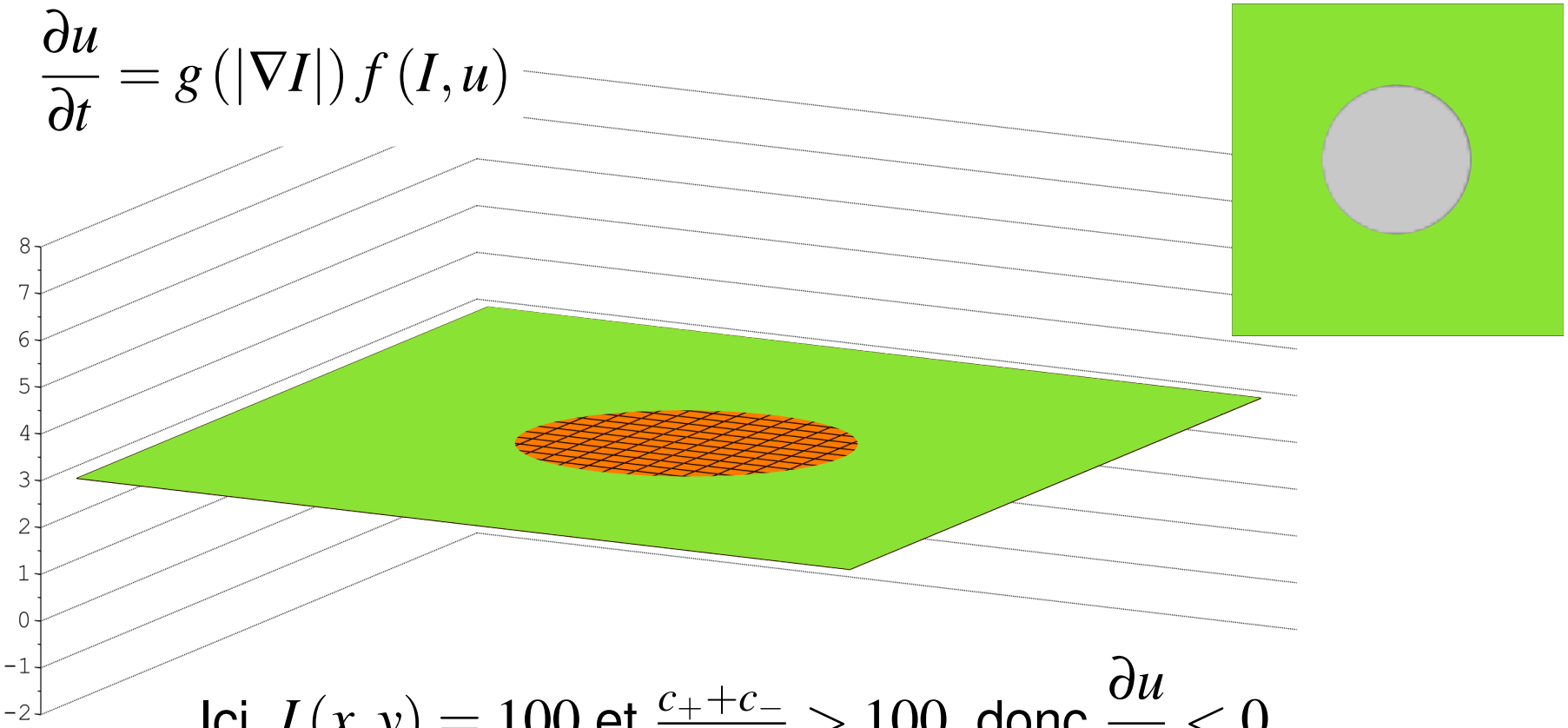


Ici, $I\left(x, y\right) = 200$ et $\frac{c_+ + c_-}{2} < 200$, donc $\frac{\partial u}{\partial t} > 0$.

Présentation du nouveau modèle

La force de guidage F_{adapt}

$$\frac{\partial u}{\partial t} = g\left(|\nabla I|\right) f\left(I, u\right)$$

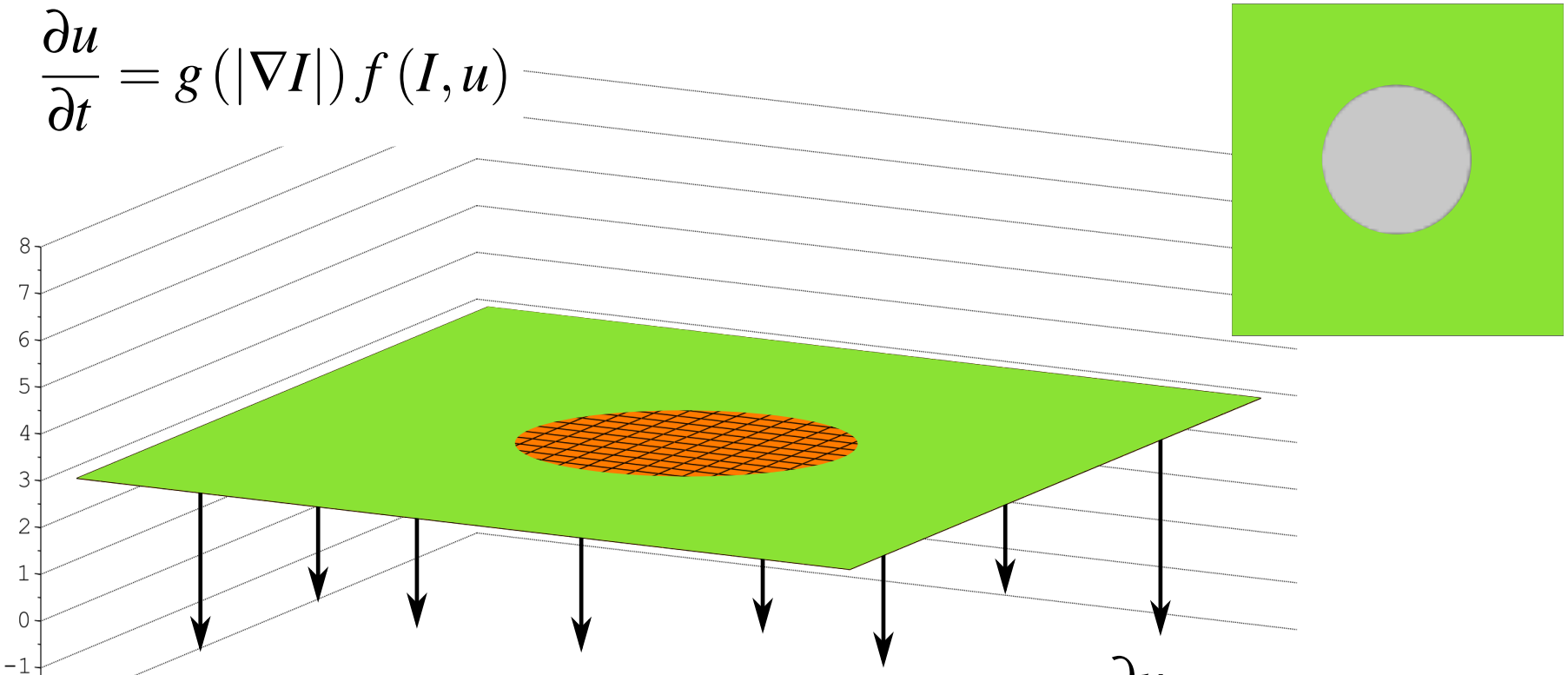


Ici, $I\left(x, y\right) = 100$ et $\frac{c_+ + c_-}{2} > 100$, donc $\dfrac{\partial u}{\partial t} < 0$.

Présentation du nouveau modèle

La force de guidage F_{adapt}

$$\frac{\partial u}{\partial t} = g\left(|\nabla I|\right) f\left(I, u\right)$$

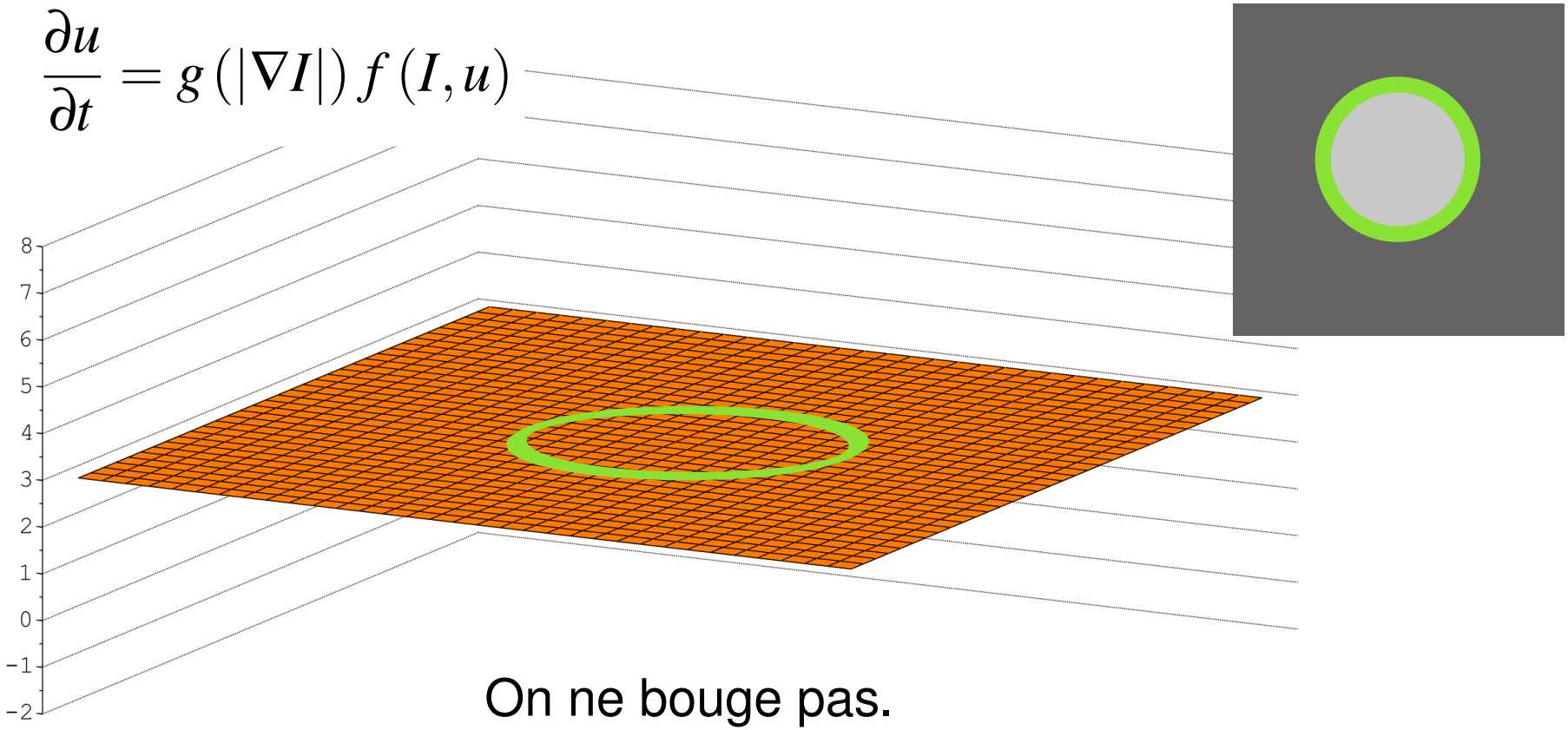


Ici, $I\left(x, y\right) = 100$ et $\frac{c_+ + c_-}{2} > 100$, donc $\frac{\partial u}{\partial t} < 0$.

Présentation du nouveau modèle

La force de guidage F_{adapt}

$$\frac{\partial u}{\partial t} = g\left(|\nabla I|\right) f\left(I, u\right)$$

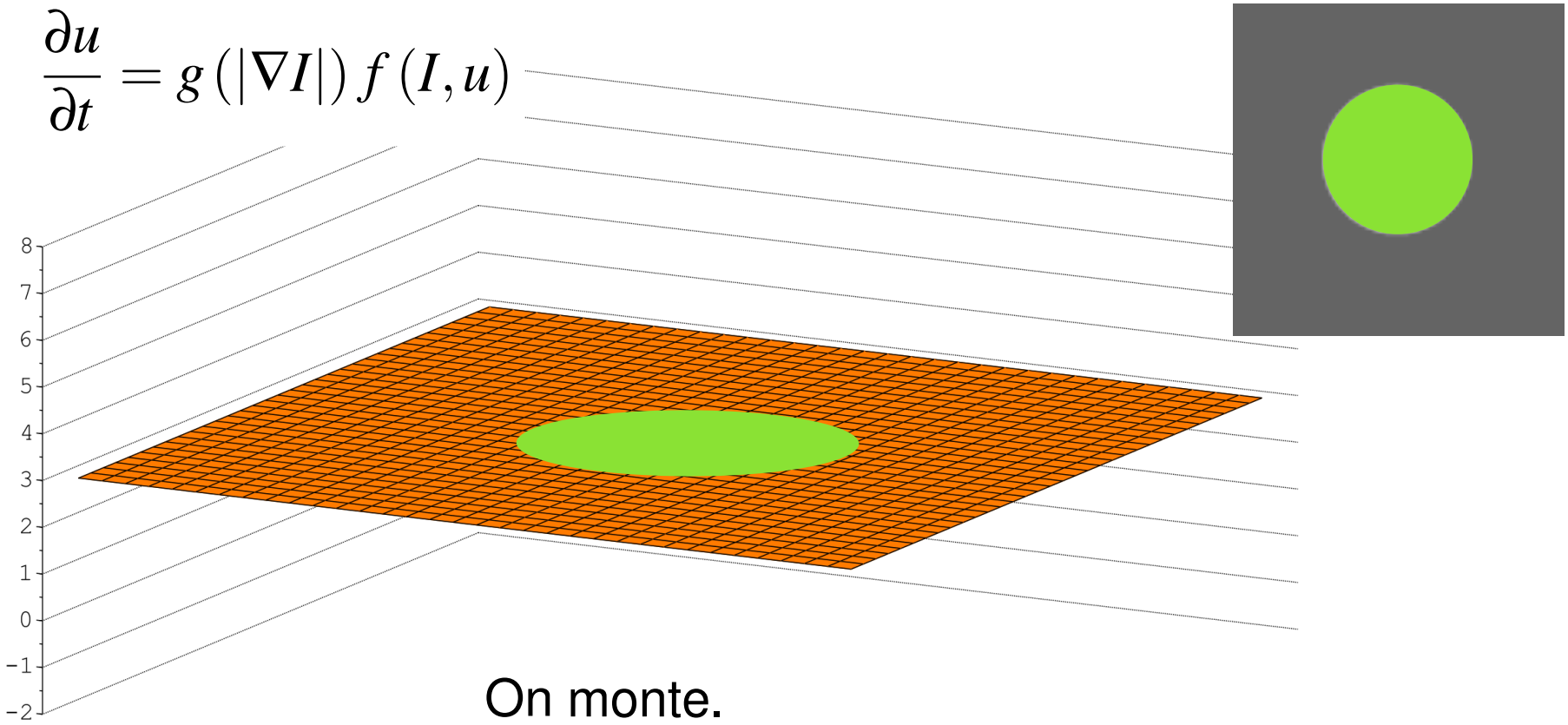


On ne bouge pas.

Présentation du nouveau modèle

La force de guidage F_{adapt}

$$\frac{\partial u}{\partial t} = g\left(|\nabla I|\right) f\left(I, u\right)$$

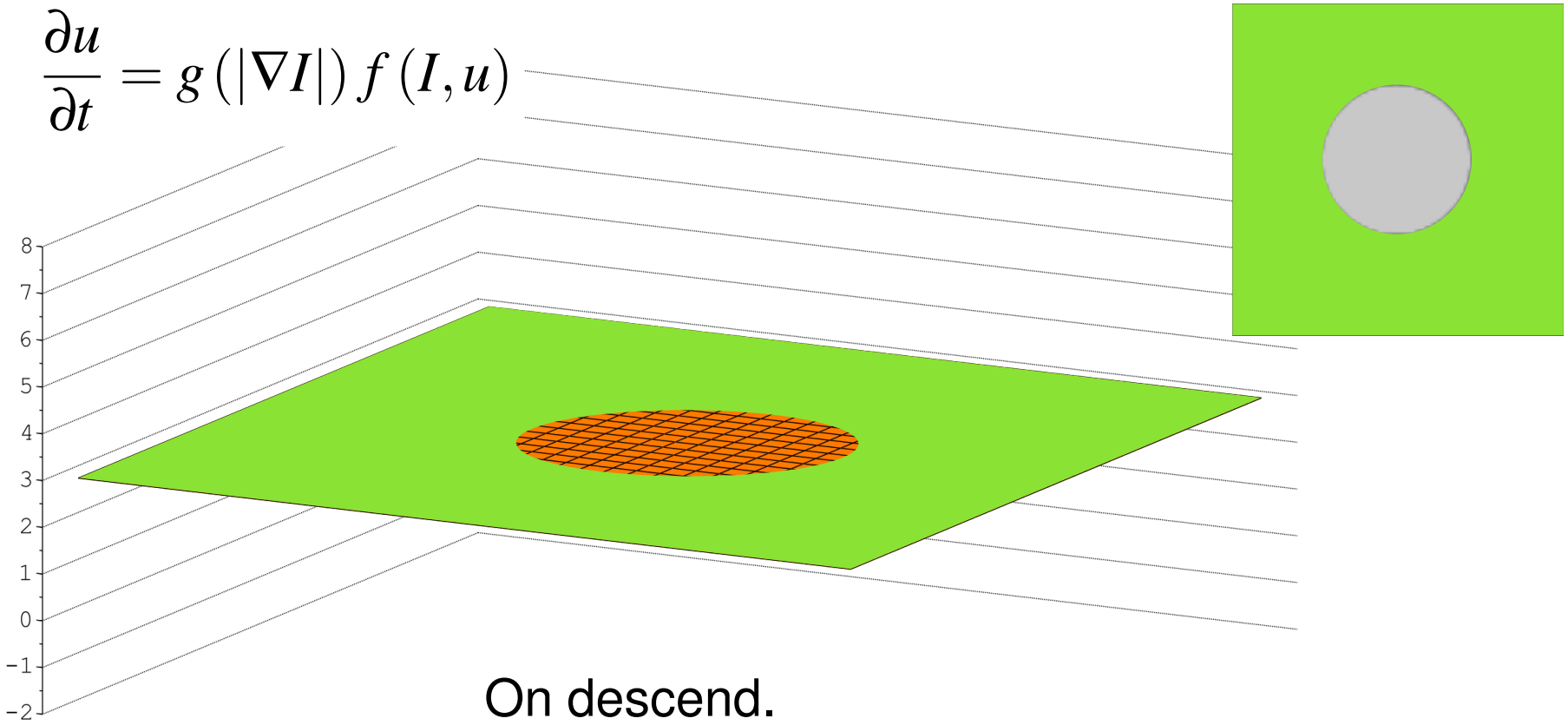


On monte.

Présentation du nouveau modèle

La force de guidage F_{adapt}

$$\frac{\partial u}{\partial t} = g\left(|\nabla I|\right) f\left(I, u\right)$$

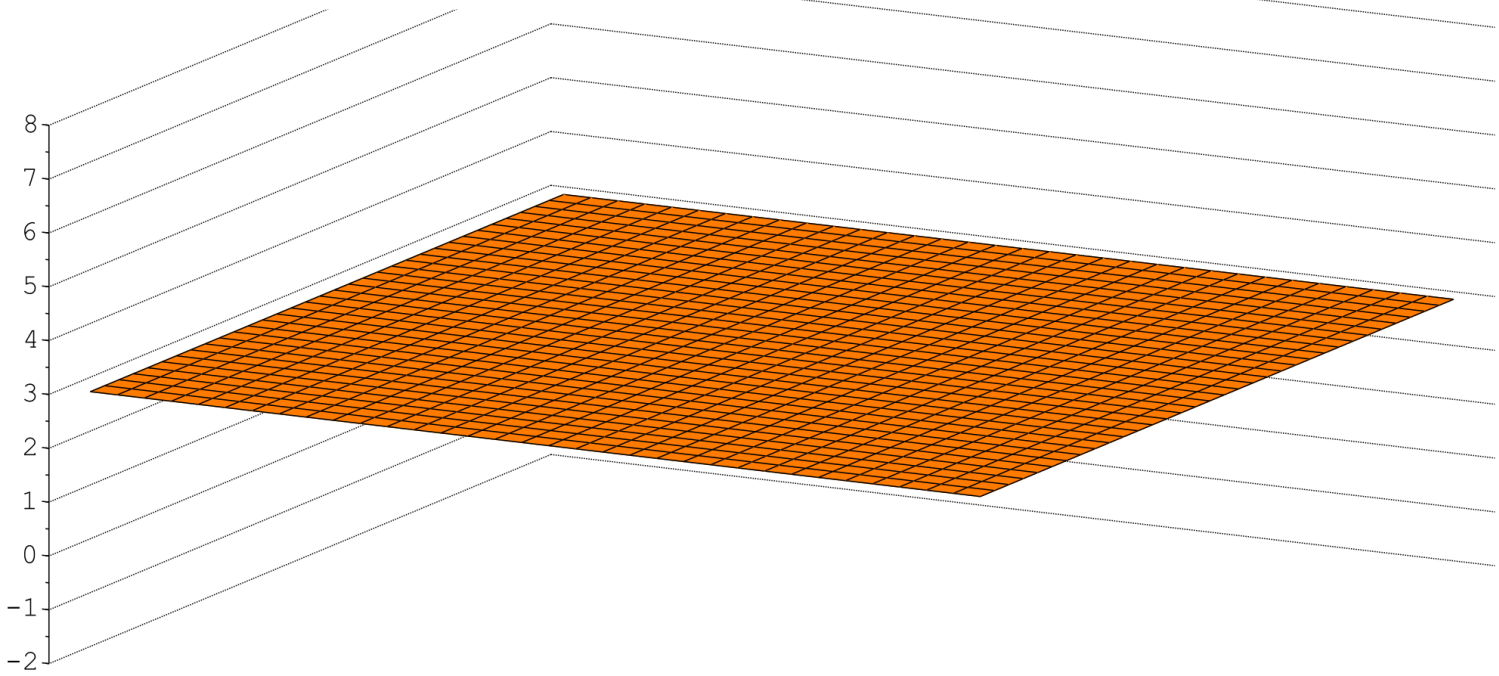


On descend.

Présentation du nouveau modèle

La force de guidage F_{adapt}

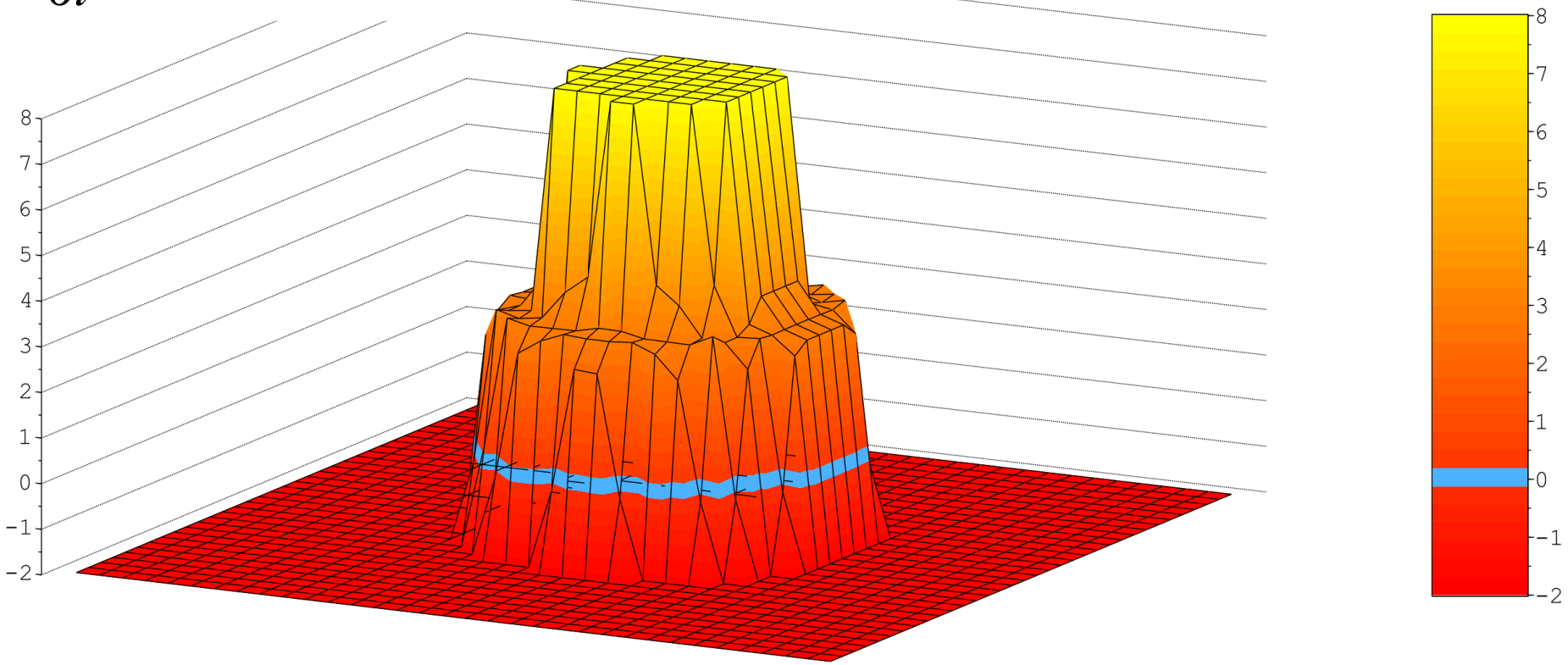
$$\frac{\partial u}{\partial t} = g\left(|\nabla I|\right) f\left(I, u\right)$$



Présentation du nouveau modèle

La force de guidage F_{adapt}

$$\frac{\partial u}{\partial t} = g\left(|\nabla I|\right) f\left(I, u\right)$$



Présentation du nouveau modèle

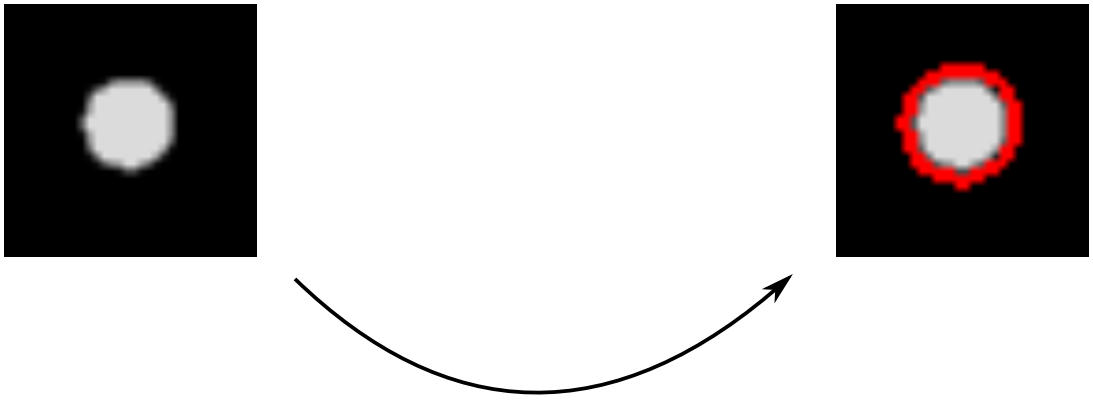
La force de guidage F_{adapt}

On voit alors que la séparation entre l'intérieur et l'extérieur de l'objet se fait très rapidement ; au bout d'une seule itération on peut déjà identifier le contour recherché par la ligne de niveau 0 de la fonction u.

Présentation du nouveau modèle

La force de guidage F_{adapt}

On voit alors que la séparation entre l'intérieur et l'extérieur de l'objet se fait très rapidement ; au bout d'une seule itération on peut déjà identifier le contour recherché par la ligne de niveau 0 de la fonction u.



Présentation du nouveau modèle

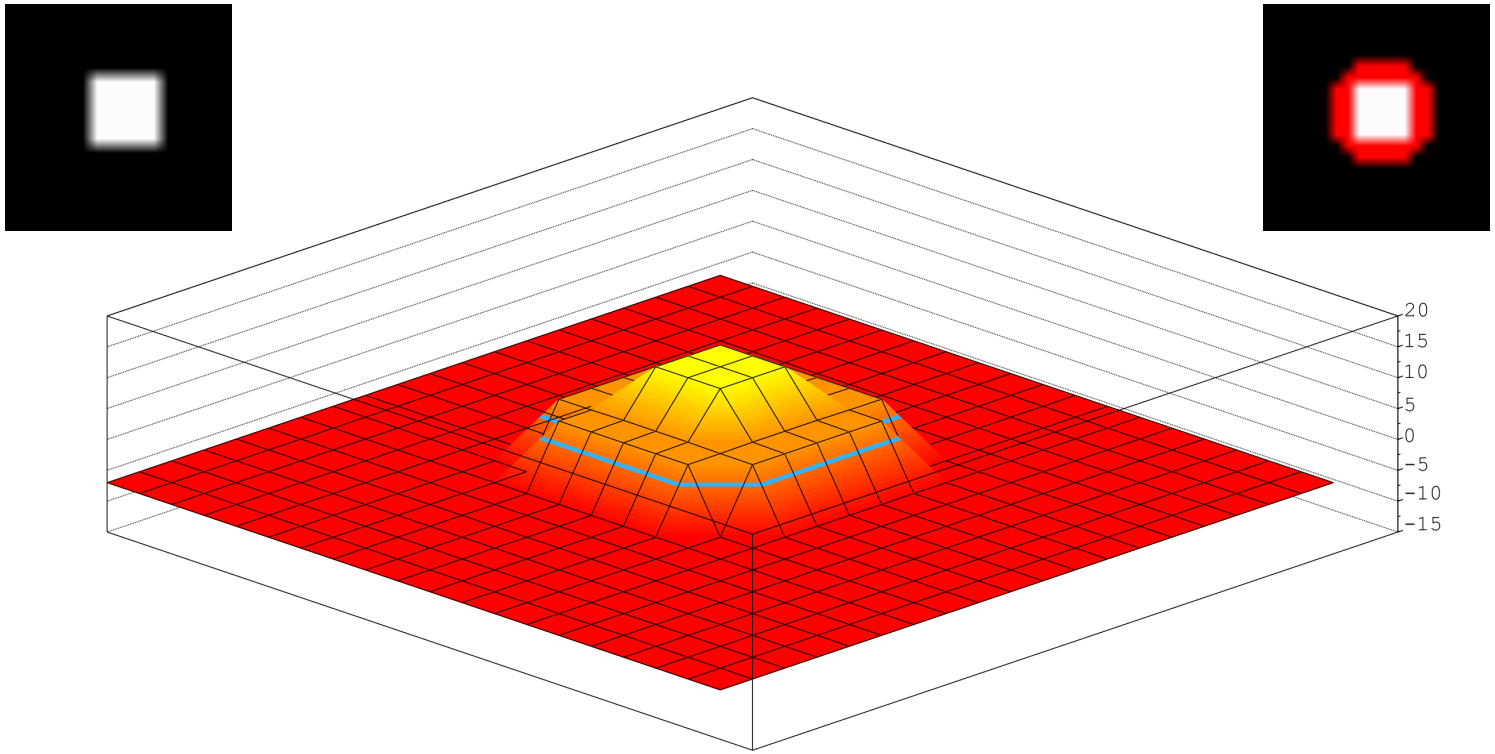
La force de guidage F_{adapt}

Bien que le modèle ait pour l'instant l'air efficace, on peut constater qu'il présente une très mauvaise résistance au bruit.

Présentation du nouveau modèle

La force de guidage F_{adapt}

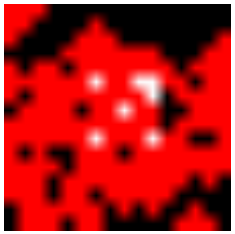
Bien que le modèle ait pour l'instant l'air efficace, on peut constater qu'il présente une très mauvaise résistance au bruit.

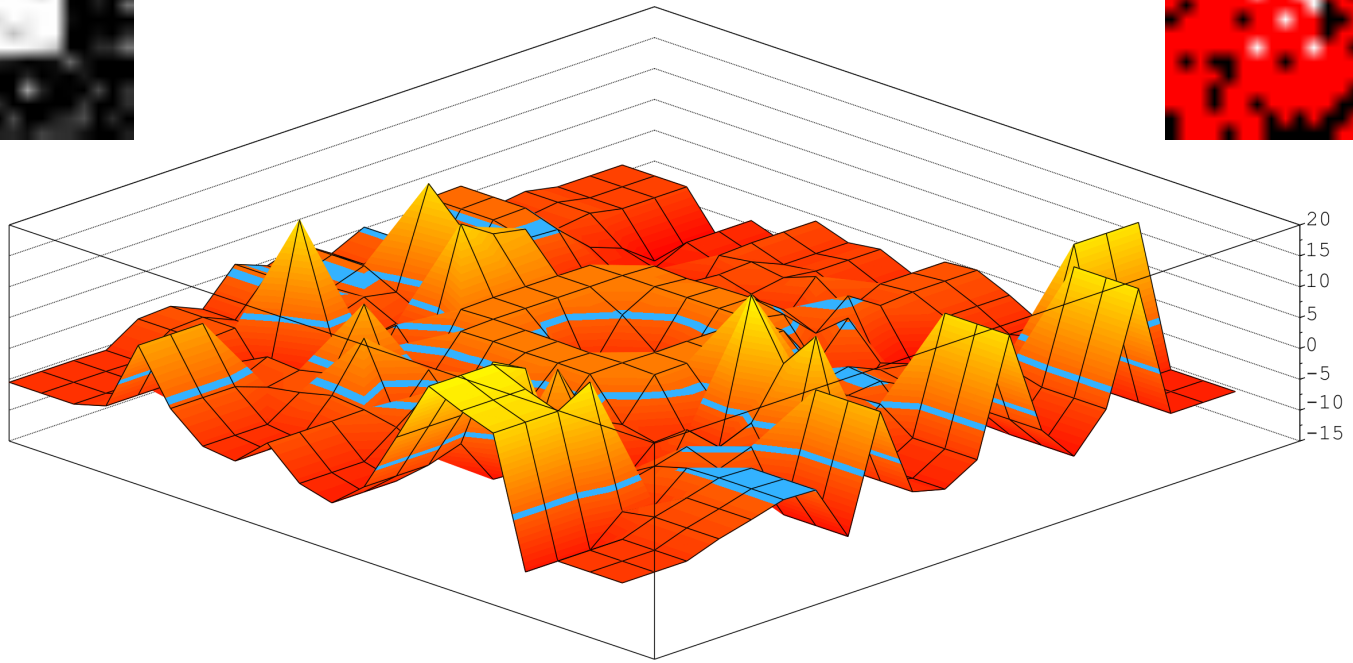


Présentation du nouveau modèle

La force de guidage F_{adapt}

Bien que le modèle ait pour l'instant l'air efficace, on peut constater qu'il présente une très mauvaise résistance au bruit.





Présentation du nouveau modèle

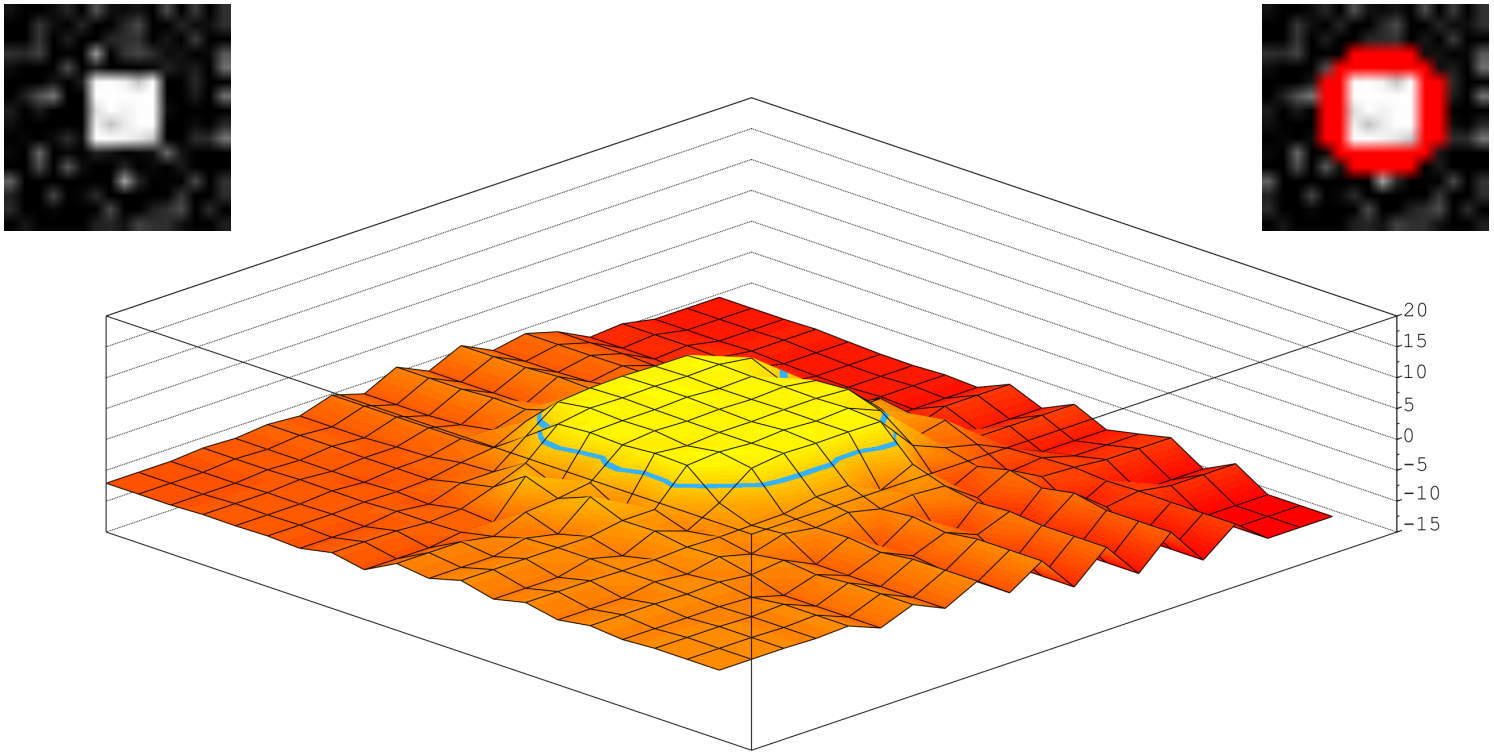
La force de guidage F_{adapt}

C'est ici qu'entre en scène la force de régularisation F_{reg}.

Présentation du nouveau modèle

La force de guidage F_{adapt}

C'est ici qu'entre en scène la force de régularisation F_{reg}.



Plan

1 Principe et inconvénients des modèles antérieurs
- Le modèle des contours actifs
- L'approche level-set des contours actifs
- Présentation d'un modèle antérieur
- Inconvénients de ce modèle

2 Présentation du nouveau modèle
- La force de guidage F_{adapt}
- La force de régularisation F_{reg}

3 Implémentation du nouveau modèle et résultats expérimentaux

Présentation du nouveau modèle

La force de régularisation F_{reg}

On considère une fonction level-set corrompue par un bruit gaussien de variance σ^2, ie.

Présentation du nouveau modèle

La force de régularisation F_{reg}

On considère une fonction level-set corrompue par un bruit gaussien de variance σ^2, ie.

$$u_{\text{observé}} = u_{\text{idéal}} + X$$

Présentation du nouveau modèle

La force de régularisation F_{reg}

On considère une fonction level-set corrompue par un bruit gaussien de variance σ^2, ie.

$$u_{\text{observé}} = u_{\text{idéal}} + X$$

(Sous-entendu évalué en tout point $x \in \Omega$)

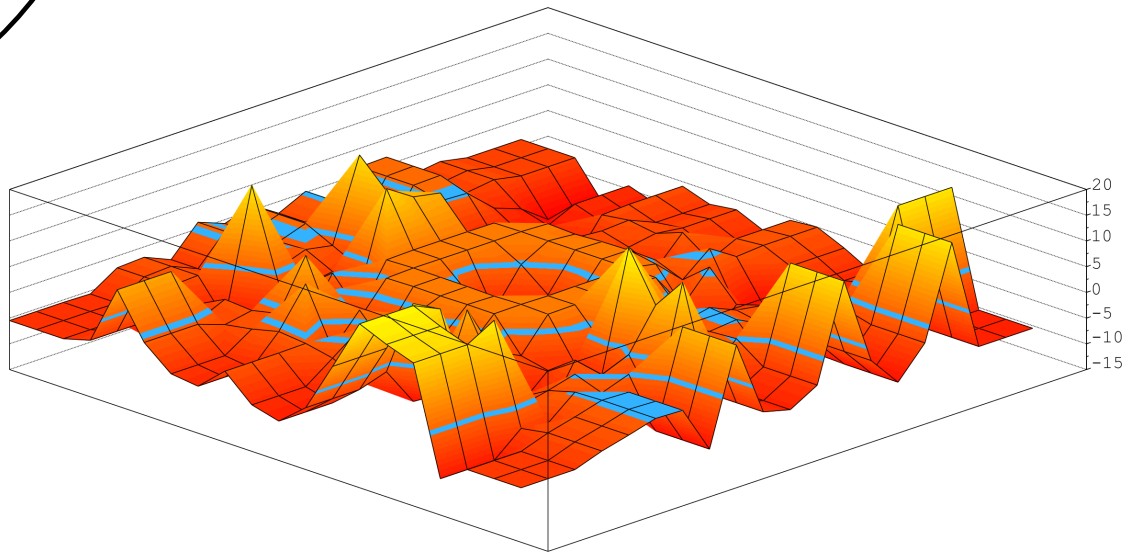
Présentation du nouveau modèle

La force de régularisation F_{reg}

On considère une fonction level-set corrompue par un bruit gaussien de variance σ^2, ie.

$$u_{\text{observé}} = u_{\text{idéal}} + X$$

Ce qu'on a



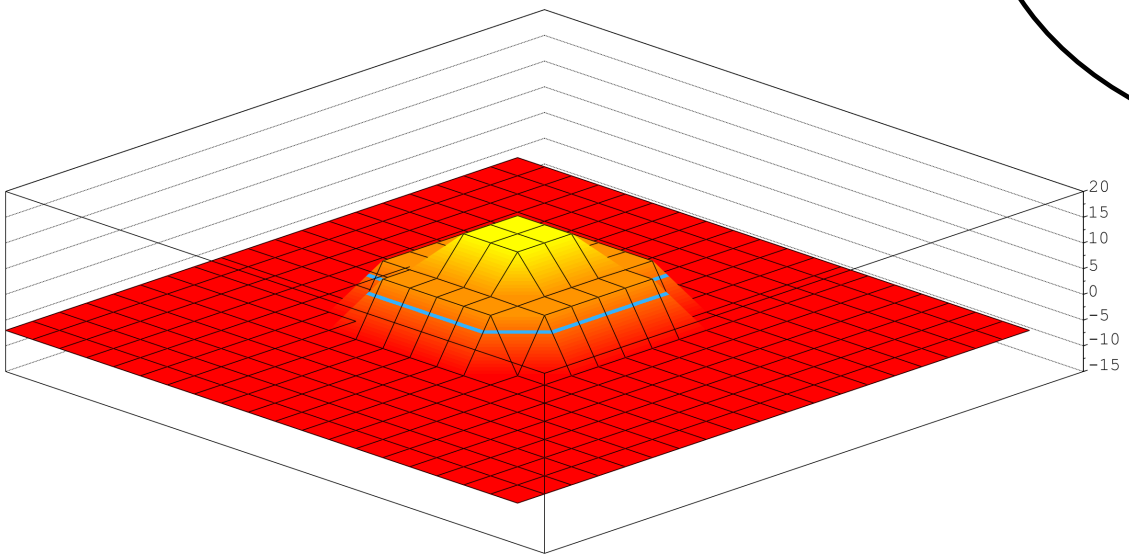
Présentation du nouveau modèle

La force de régularisation F_{reg}

On considère une fonction level-set corrompue par un bruit gaussien de variance σ^2, ie.

$$u_{\text{observé}} = u_{\text{idéal}} + X$$

Ce qu'on cherche

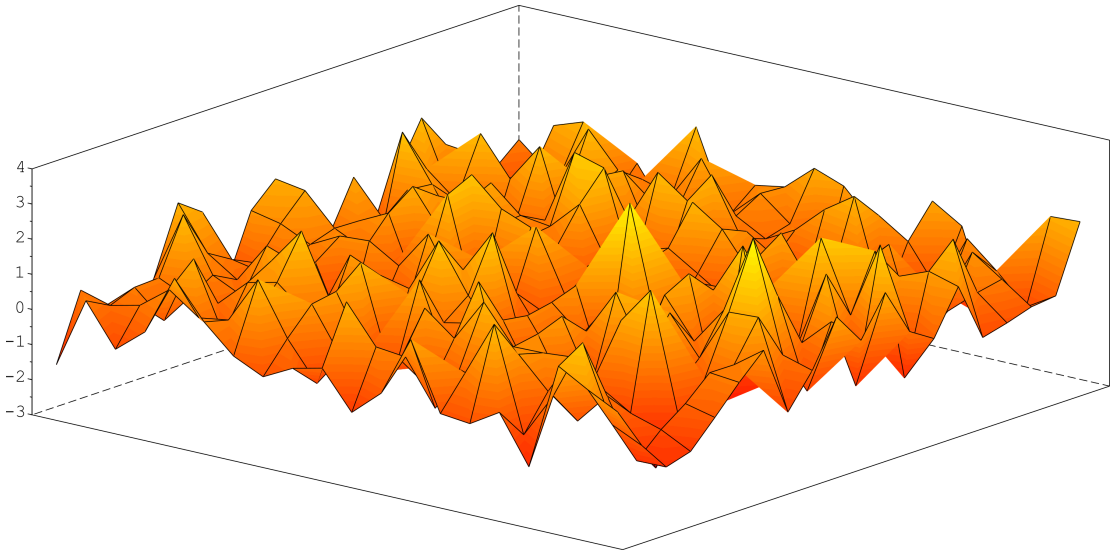


Présentation du nouveau modèle

La force de régularisation F_{reg}

On considère une fonction level-set corrompue par un bruit gaussien de variance σ^2, ie.

$$u_{\text{observé}} = u_{\text{idéal}} + X$$



Boîte noire :

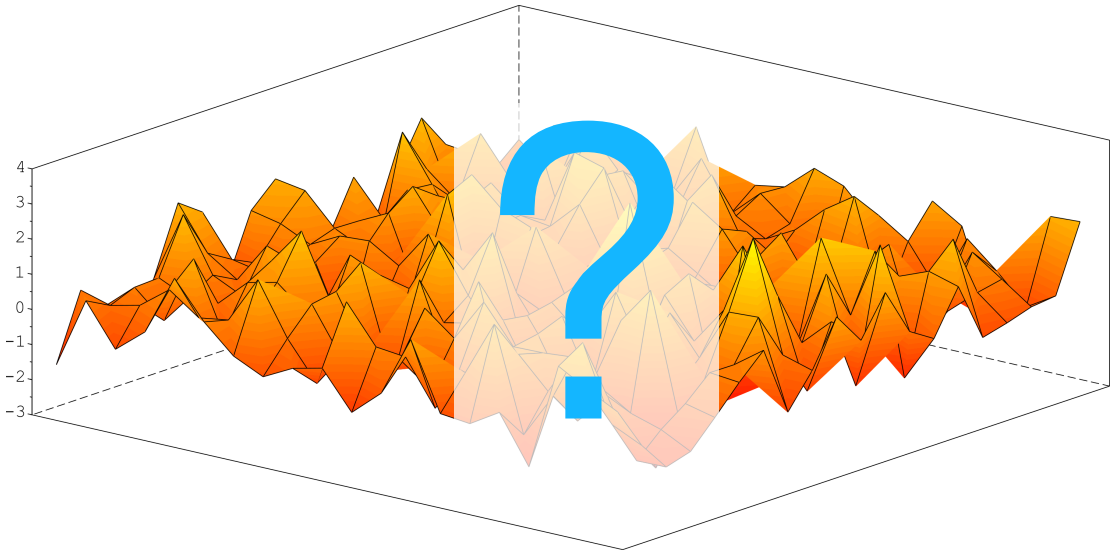
$$X(x) \to \mathcal{N}\left(0, \sigma^2\right)$$

Présentation du nouveau modèle

La force de régularisation F_{reg}

On considère une fonction level-set corrompue par un bruit gaussien de variance σ^2, ie.

$$u_{\text{observé}} = u_{\text{idéal}} + X$$



Boîte noire :

$$X(x) \to \mathcal{N}(0, \sigma^2)$$

Présentation du nouveau modèle

La force de régularisation F_{reg}

On peut montrer ([a]) que les deux fonctions $u_{\text{observé}}$ et $u_{\text{idéal}}$ sont à une distance L^2 de σ l'une de l'autre, ie.

a. Voir l'article de Rudin et al. (1992) [1].

Présentation du nouveau modèle

La force de régularisation F_{reg}

On peut montrer ([a]) que les deux fonctions $u_{\text{observé}}$ et $u_{\text{idéal}}$ sont à une distance L^2 de σ l'une de l'autre, ie.

$$\int_\Omega (u_{\text{observé}} - u_{\text{idéal}})^2 \, \mathrm{d}x = \sigma^2.$$

a. Voir l'article de Rudin et al. (1992) [1].

Présentation du nouveau modèle

La force de régularisation F_{reg}

On peut montrer ([a]) que les deux fonctions $u_{\text{observé}}$ et $u_{\text{idéal}}$ sont à une distance L^2 de σ l'une de l'autre, ie.

$$\int_{\Omega} \left(u_{\text{observé}} - u_{\text{idéal}}\right)^2 \mathrm{d}x = \sigma^2.$$

Ainsi, $u_{\text{idéal}} \in \mathcal{S}_{L^2}\left(u_{\text{observé}}, \sigma\right)$.

a. Voir l'article de Rudin et al. (1992) [1].

Présentation du nouveau modèle

La force de régularisation F_{reg}

On souhaite que $u_{\text{idéal}}$ soit le plus lisse et le moins oscillant possible.

Présentation du nouveau modèle

La force de régularisation F_{reg}

On souhaite que $u_{\text{idéal}}$ soit le plus lisse et le moins oscillant possible. Pour cela on va chercher à pénaliser sa variation totale donnée par

$$E : u \mapsto \int_{\Omega} |\nabla u| \, \mathrm{d}x.$$

Présentation du nouveau modèle

La force de régularisation F_{reg}

On souhaite que $u_{\text{idéal}}$ soit le plus lisse et le moins oscillant possible. Pour cela on va chercher à pénaliser sa variation totale donnée par

$$E : u \mapsto \int_{\Omega} |\nabla u| \, \mathrm{d}x.$$

On a donc

$$u_{\text{idéal}} = \min_{u \in \mathcal{S}_{L^2}(u_{\text{obs},\sigma})} \left\{ \int_{\Omega} |\nabla u| \, \mathrm{d}x \right\}.$$

Présentation du nouveau modèle

La force de régularisation F_{reg}

Cherchons une équation d'évolution d'Euler-Lagrange pour la fonction level-set u dans l'optique de minimiser

$$E : u \mapsto \int_{\Omega} |\nabla u| \, \mathrm{d}x.$$

Présentation du nouveau modèle

La force de régularisation F_{reg}

Pour deux fonction lipschitziennes u et v et un réel λ, on pose

$$\mathcal{E}(\lambda) \overset{\text{déf}}{=} E(u+\lambda v) = \int_{\Omega} |\nabla u + \lambda \nabla v| \, \mathrm{d}x.$$

Présentation du nouveau modèle

La force de régularisation F_{reg}

On obtient, en dérivant,

$$\mathcal{E}'(\lambda) = \int_\Omega \left\langle \frac{\nabla u + \lambda \nabla v}{|\nabla u + \lambda \nabla v|} \middle| \nabla v \right\rangle \mathrm{d}x.$$

Présentation du nouveau modèle

La force de régularisation F_{reg}

On traduit alors la condition d'optimalité du premier ordre :

$$\mathcal{E}'(0) = 0$$

Présentation du nouveau modèle

La force de régularisation F_{reg}

On traduit alors la condition d'optimalité du premier ordre :

$$\mathcal{E}'(0) = 0 \iff \int_\Omega \left\langle \frac{\nabla u}{|\nabla u|} \middle| \nabla v \right\rangle \mathrm{d}x = 0$$

Présentation du nouveau modèle

La force de régularisation F_{reg}

On traduit alors la condition d'optimalité du premier ordre :

$$\begin{aligned}\mathcal{E}'(0) = 0 &\iff \int_\Omega \left\langle \frac{\nabla u}{|\nabla u|} \middle| \nabla v \right\rangle \mathrm{d}x = 0 \\ &\overset{\text{ipp}}{\iff} \int_{\partial\Omega} \frac{1}{|\nabla u|} \frac{\partial u}{\partial n} v \mathrm{d}\sigma - \int_\Omega \mathrm{div}\left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|}\right) v \mathrm{d}x = 0.\end{aligned}$$

Présentation du nouveau modèle

La force de régularisation F_{reg}

Comme l'inégalité précédente est valable pour tout v suffisamment régulière, on a

$$\begin{cases} \text{div}\left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|}\right) = 0 & \text{sur } \Omega, \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Présentation du nouveau modèle

La force de régularisation F_{reg}

Et donc

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \text{div}\left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|}\right) & \text{sur } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \\ u_{|t=0} = u_0. \end{cases}$$

Présentation du nouveau modèle

La force de régularisation F_{reg}

On reconnait reconnait le terme de courbure présenté dans la première partie :

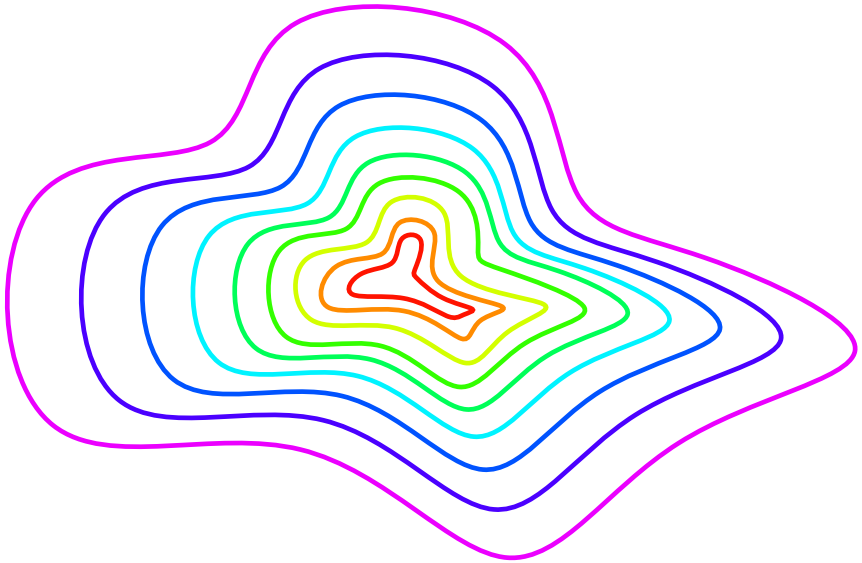
$$\frac{\partial u}{\partial t} = \text{div}\left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|}\right) = \kappa\,.$$

Présentation du nouveau modèle

La force de régularisation F_{reg}

On reconnait reconnait le terme de courbure présenté dans la première partie :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \text{div}\left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|}\right) = \kappa\,.$$

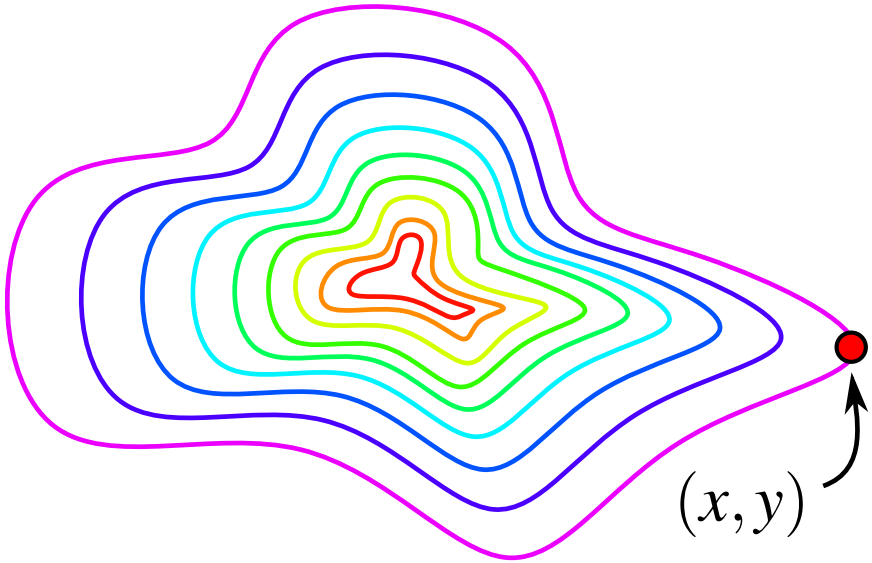


Présentation du nouveau modèle

La force de régularisation F_{reg}

On reconnait reconnait le terme de courbure présenté dans la première partie :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \text{div}\left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|}\right) = \kappa\,.$$

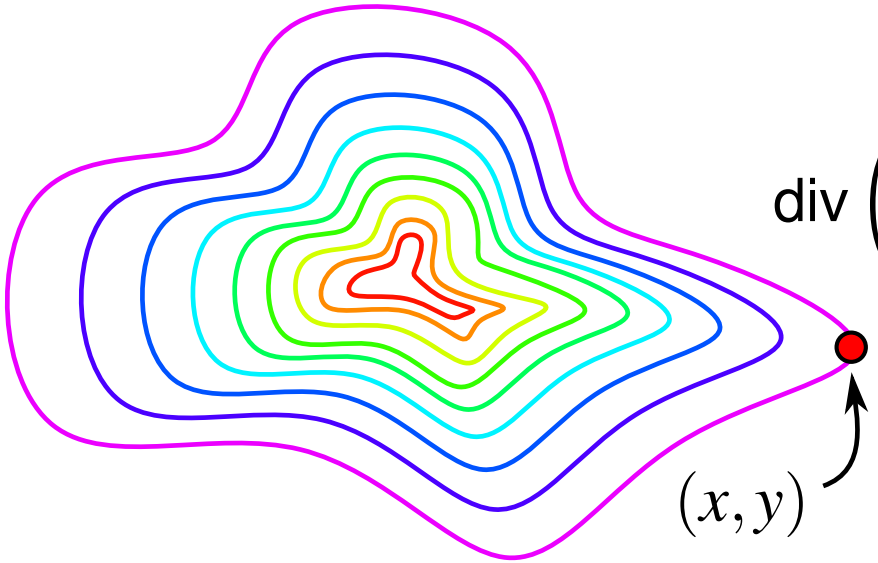


Présentation du nouveau modèle

La force de régularisation F_{reg}

On reconnait reconnait le terme de courbure présenté dans la première partie :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \text{div}\left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|}\right) = \kappa\,.$$



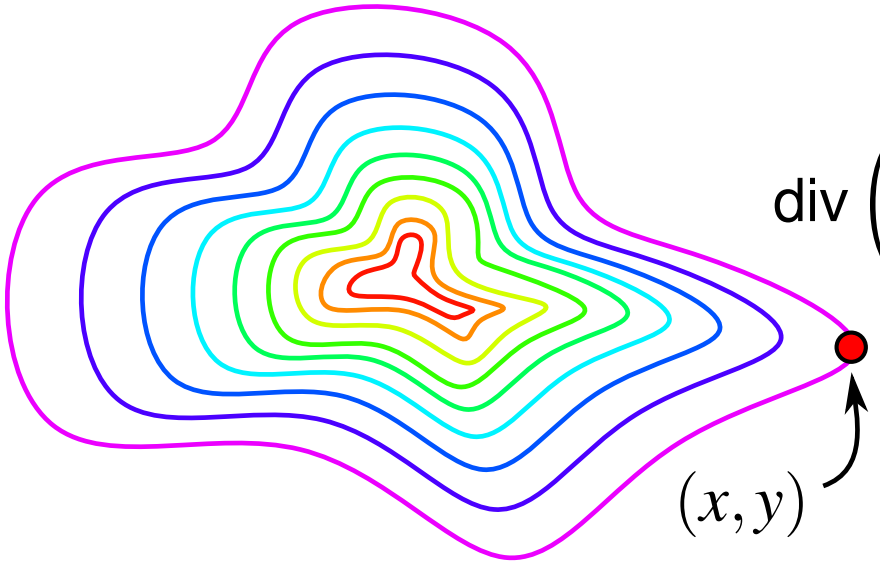
$$\text{div}\left(\frac{\nabla u\,(x,y)}{|\nabla u\,(x,y)|}\right) = \kappa(x,y)$$

Présentation du nouveau modèle

La force de régularisation F_{reg}

On reconnait reconnait le terme de courbure présenté dans la première partie :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \text{div}\left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|}\right) = \kappa\,.$$



$$\text{div}\left(\frac{\nabla u\,(x,y)}{|\nabla u\,(x,y)|}\right) =$$ Courbure de la ligne de niveau de u passant par le point (x,y)

Présentation du nouveau modèle

La force de régularisation F_{reg}

On reconnait reconnait le terme de courbure présenté dans la première partie :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \text{div}\left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|}\right) = \kappa\,.$$

Les lignes de niveaux de la fonction u évoluent donc à vitesse d'autant plus élevée que leur courbure est forte, le tout dans une régularisation globale de la fonction u.

Présentation du nouveau modèle

La force de régularisation F_{reg}

On reconnait reconnait le terme de courbure présenté dans la première partie :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \text{div}\left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|}\right) = \kappa\,.$$

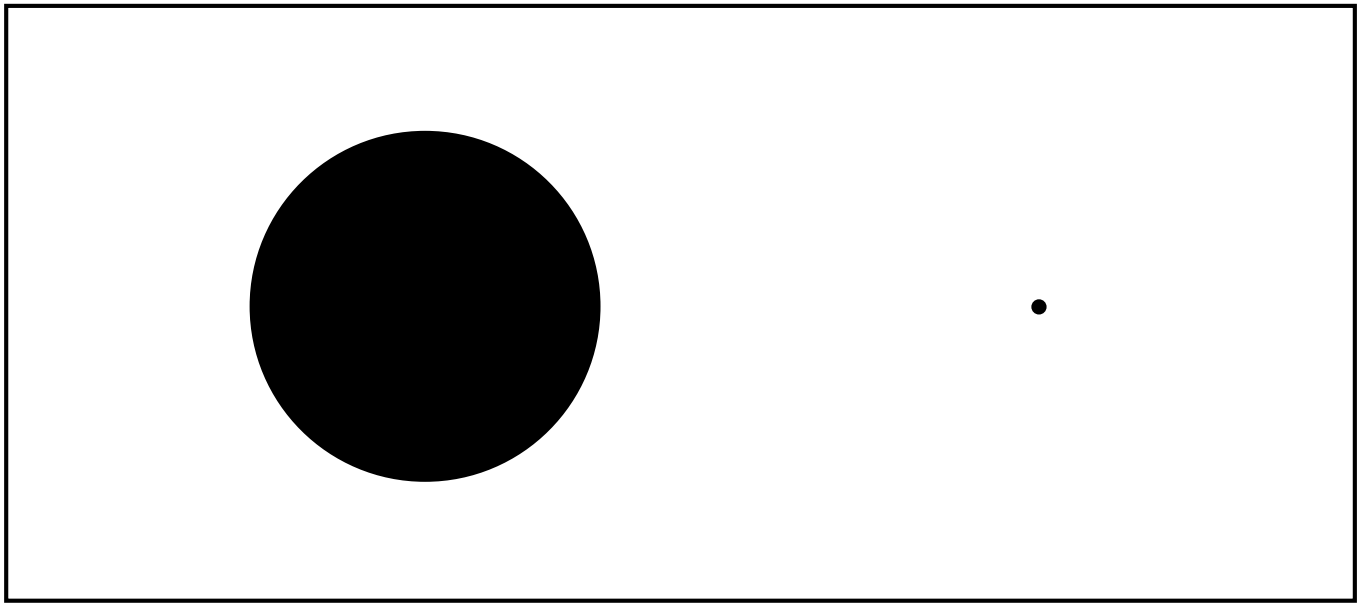
Les lignes de niveaux de la fonction u évoluent donc à vitesse d'autant plus élevée que leur courbure est forte, le tout dans une régularisation globale de la fonction u.

Regardons comment ces propriétés peuvent être utiles sur le modèle de Wang et He.

Présentation du nouveau modèle

La force de régularisation F_{reg}

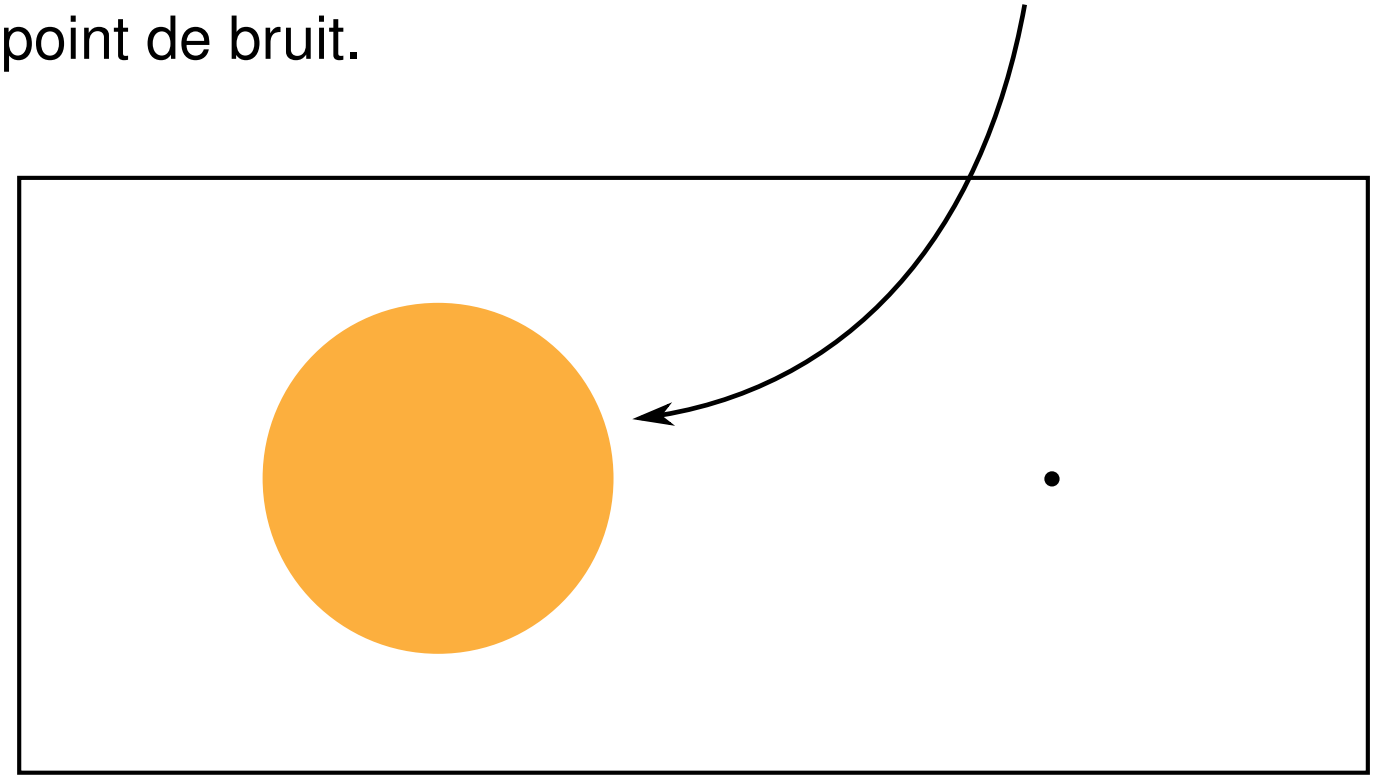
On considère une image composée d'un disque (à détecter) et d'un point de bruit.



Présentation du nouveau modèle

La force de régularisation F_{reg}

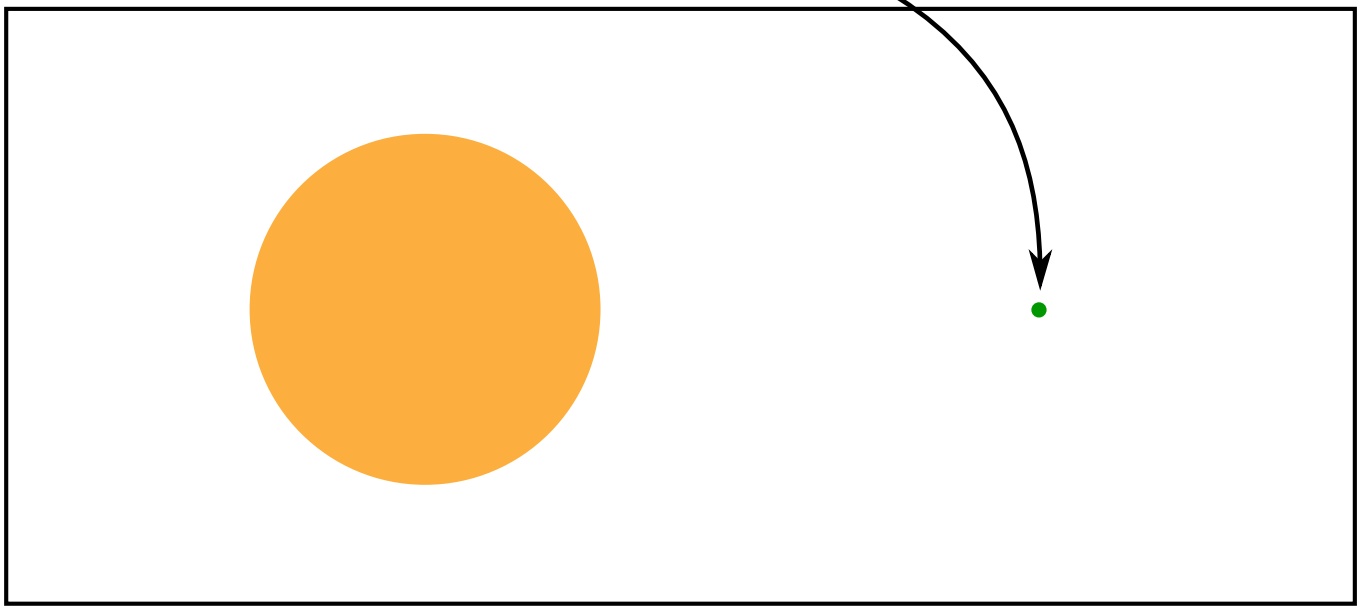
On considère une image composée d'un disque (à détecter) et d'un point de bruit.



Présentation du nouveau modèle

La force de régularisation F_{reg}

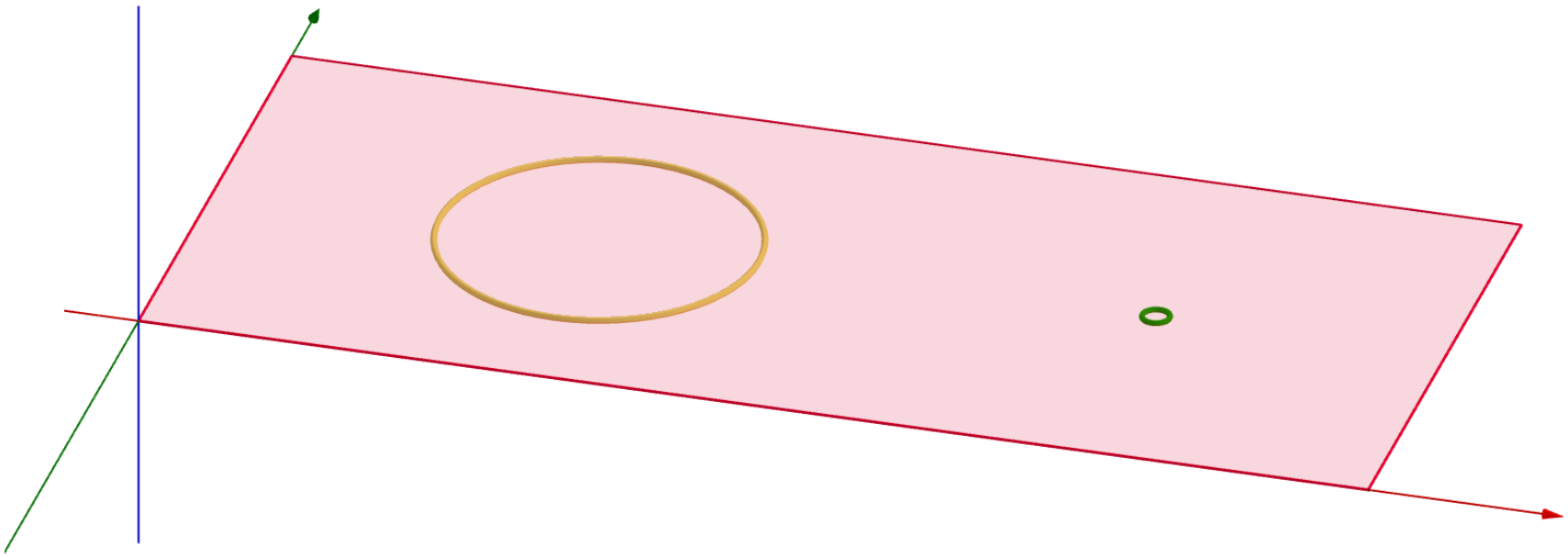
On considère une image composée d'un disque (à détecter) et d'un point de bruit.



Présentation du nouveau modèle

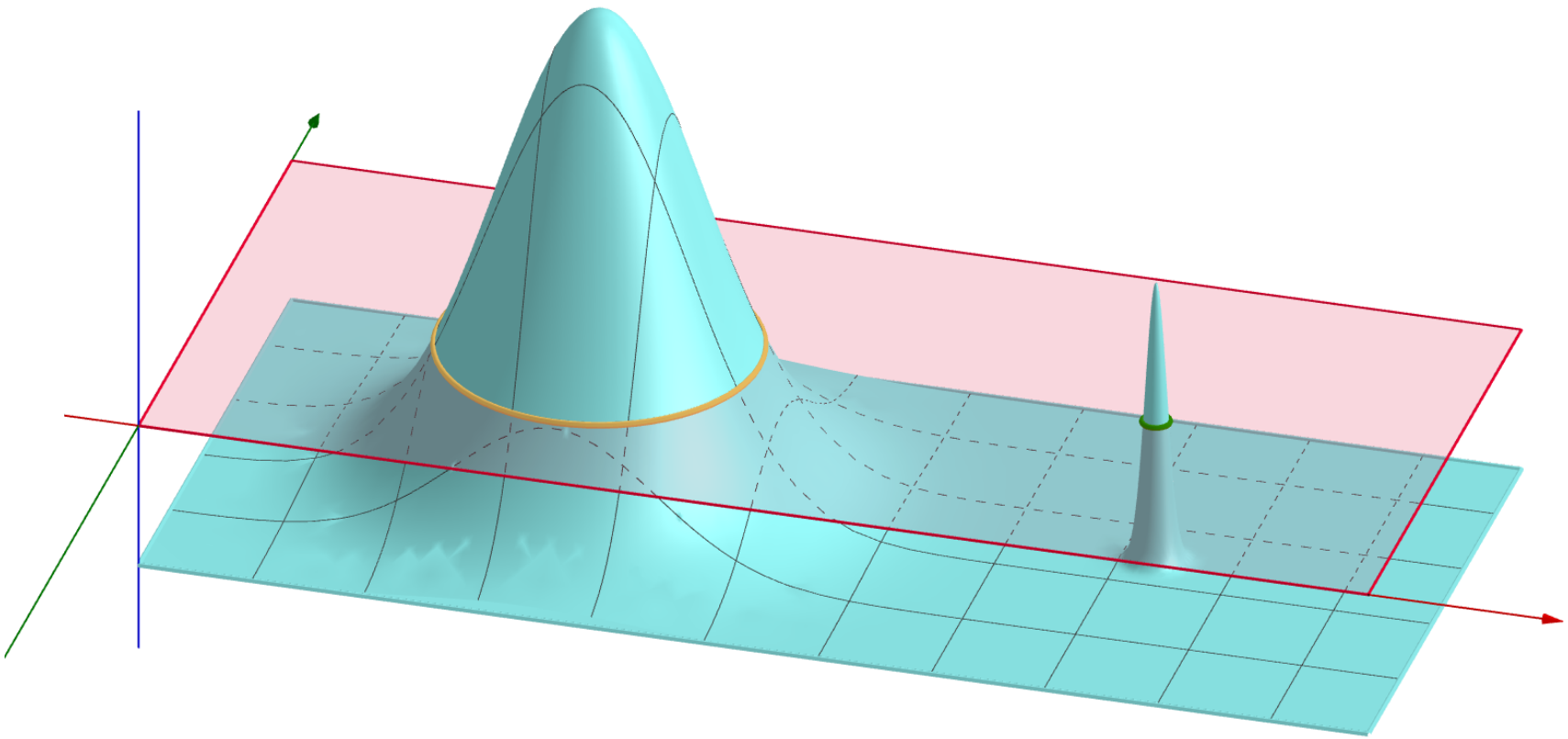
La force de régularisation F_{reg}

Comme on peut s'y attendre au lancement de l'algorithme de détection des contours, la force de guidage F_{adapt} nous amènera en quelques instants à une fonction u de cette allure.



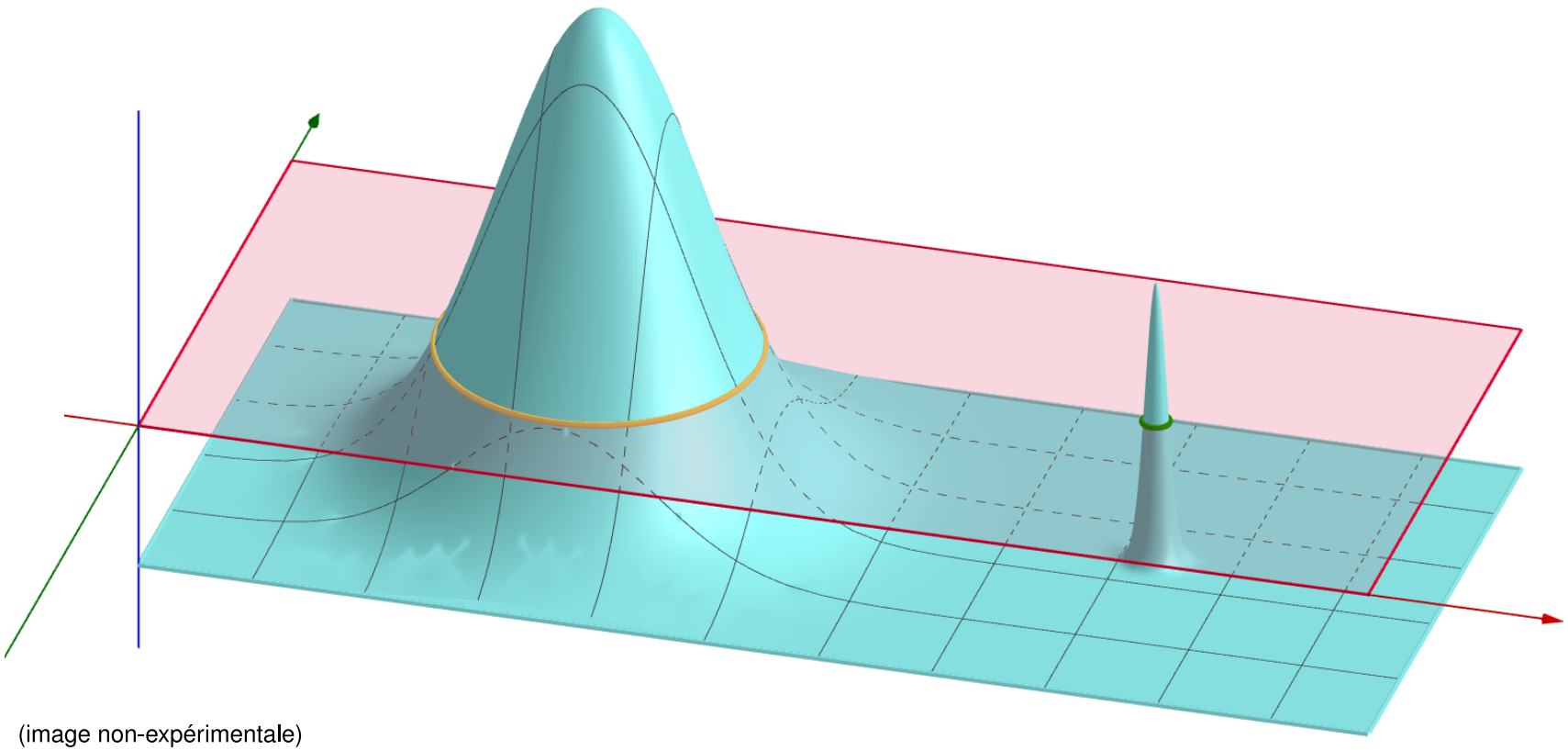
Présentation du nouveau modèle

La force de régularisation F_{reg}



Présentation du nouveau modèle

La force de régularisation F_{reg}



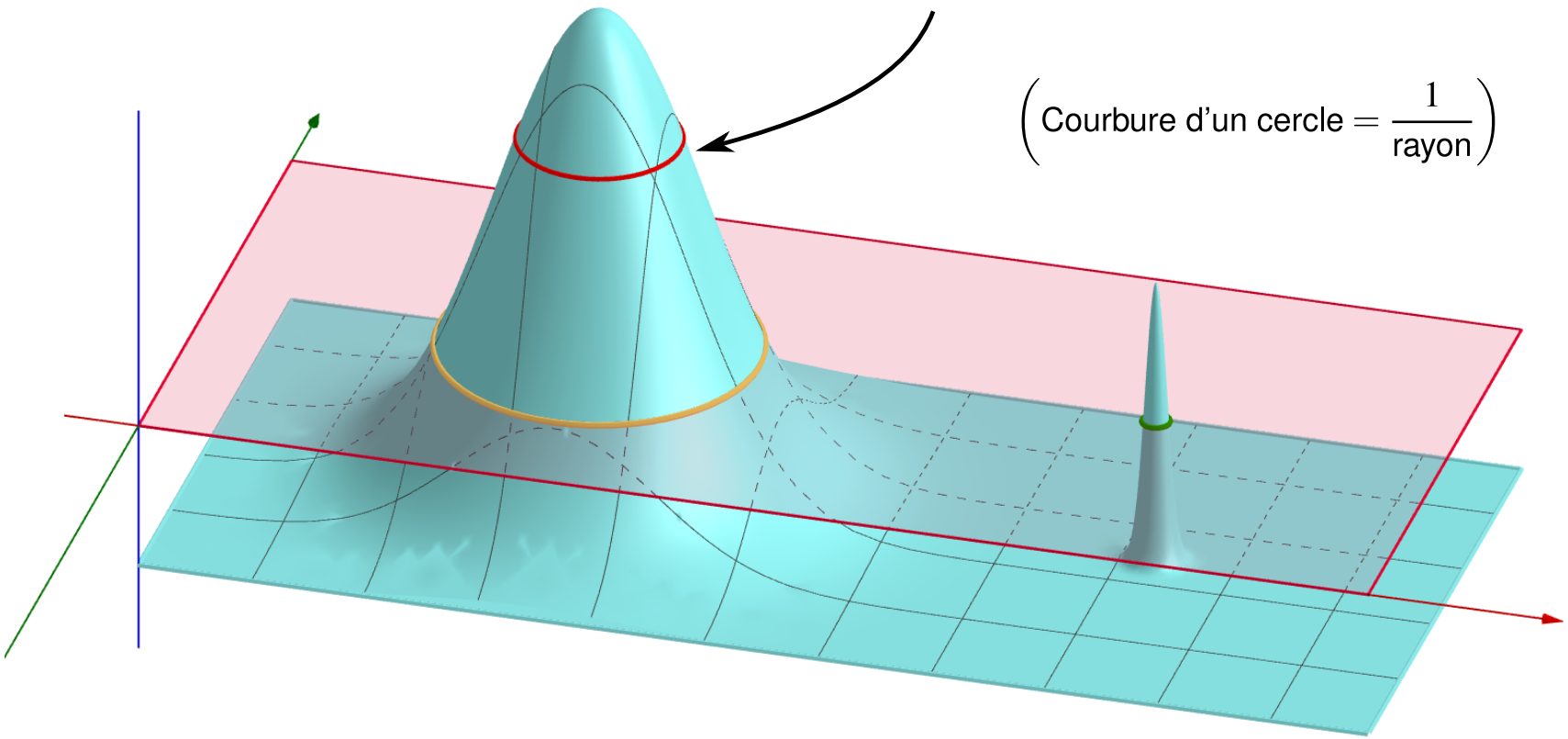
(image non-expérimentale)

Présentation du nouveau modèle

La force de régularisation F_{reg}

Faible courbure des lignes de niveaux sur les zones de contours

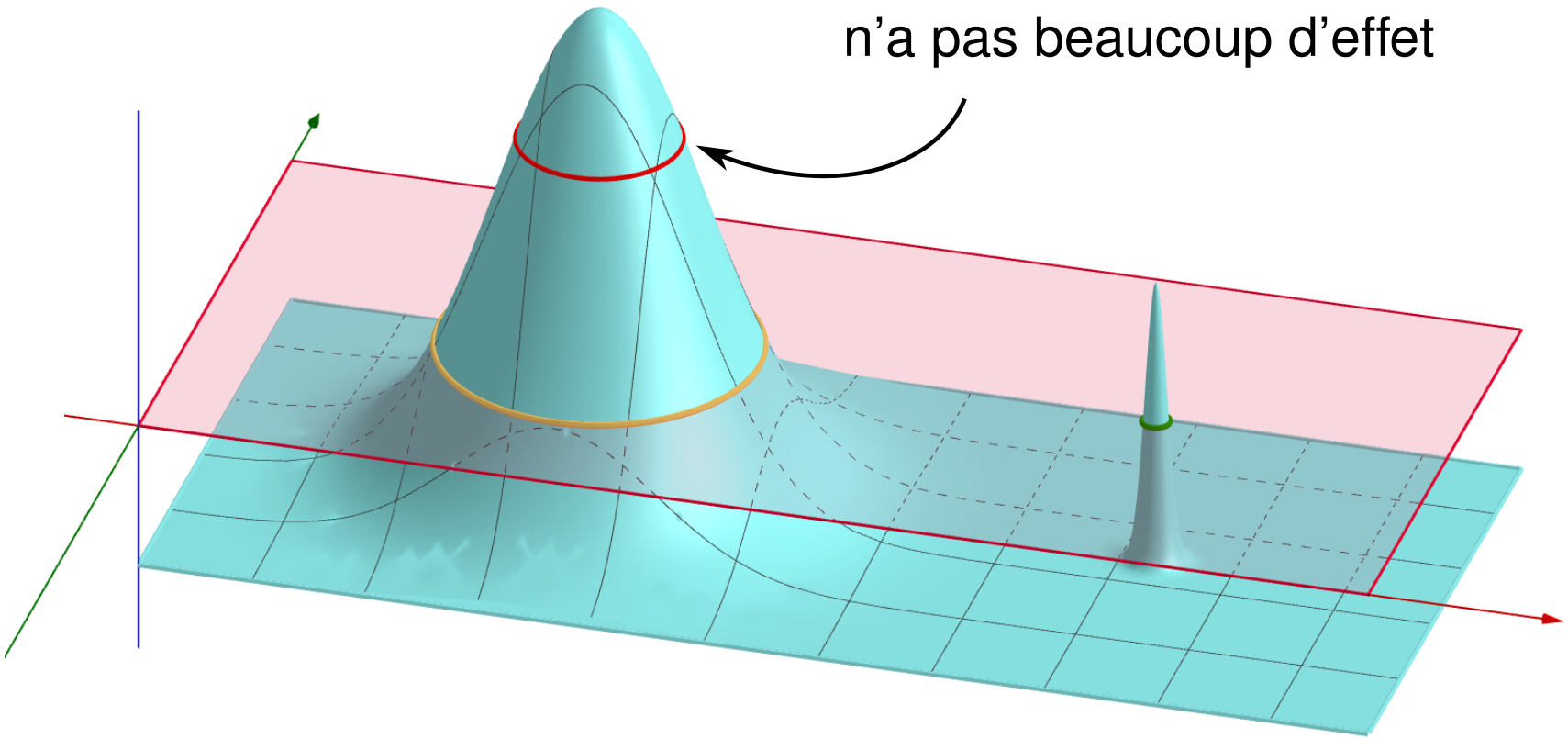
$$\left(\text{Courbure d'un cercle} = \frac{1}{\text{rayon}}\right)$$



Présentation du nouveau modèle

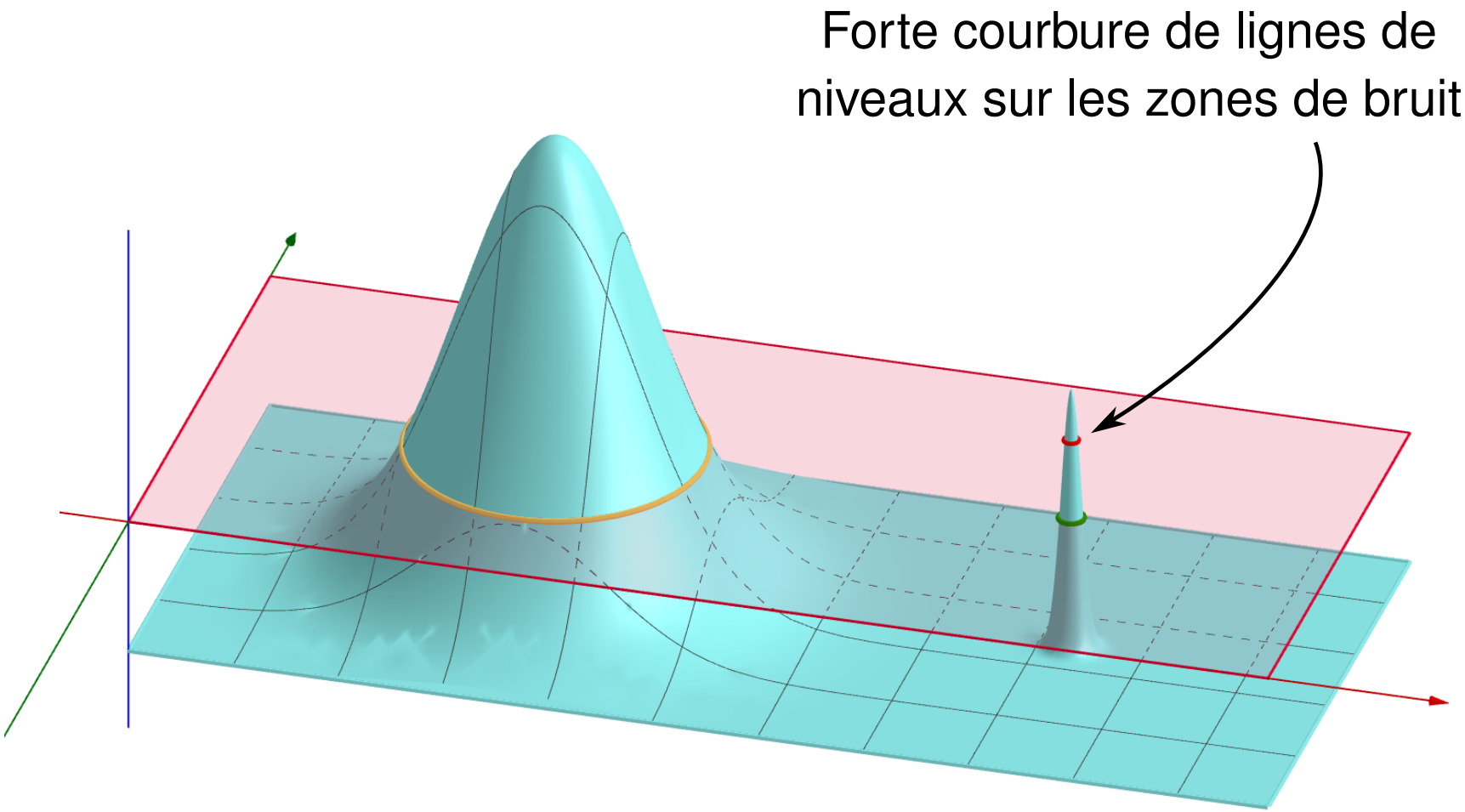
La force de régularisation F_{reg}

Donc propagation lente des lignes de niveau dans ces zones : la régularisation n'a pas beaucoup d'effet



Présentation du nouveau modèle

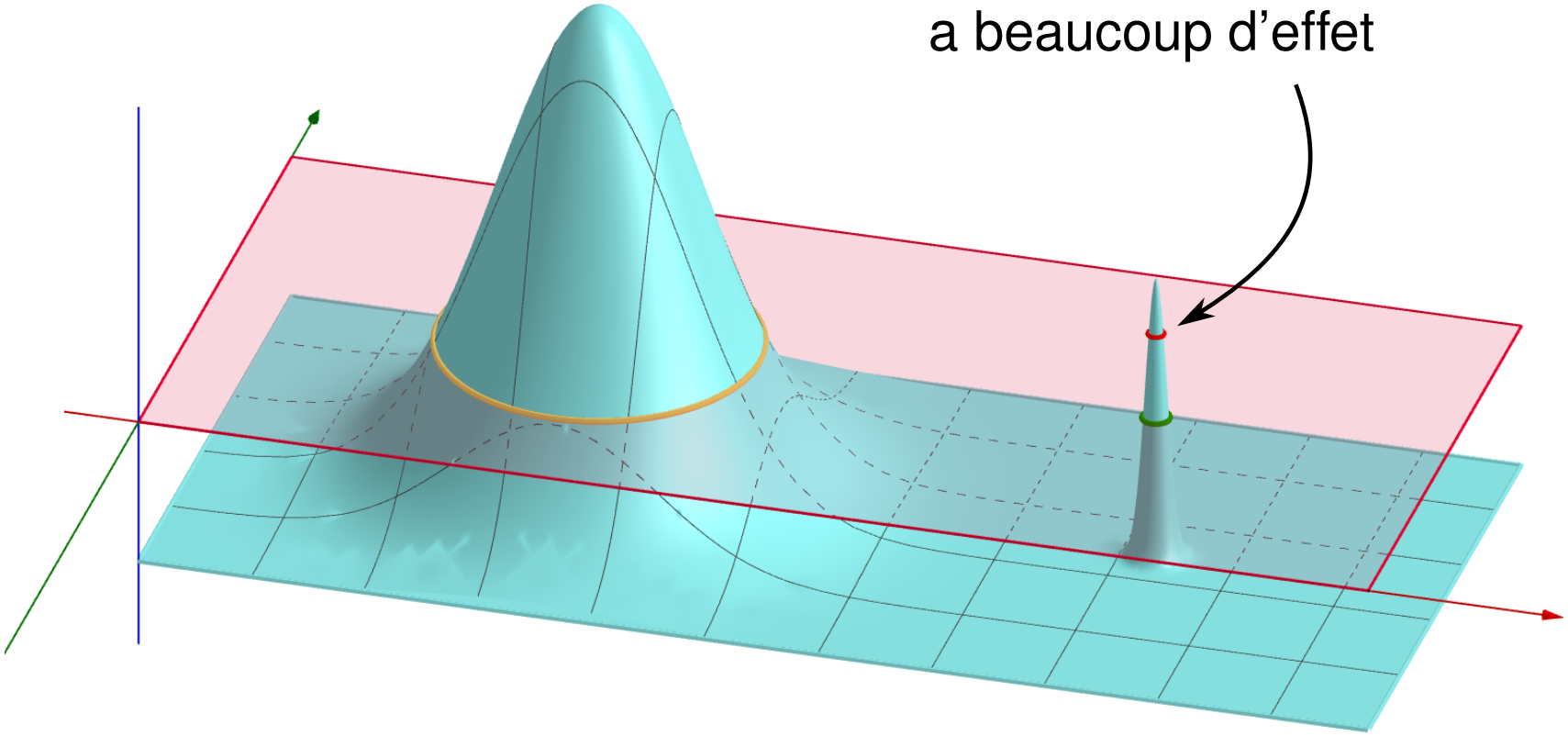
La force de régularisation F_{reg}



Présentation du nouveau modèle

La force de régularisation F_{reg}

Donc propagation rapide des lignes de niveau dans ces zones : la régularisation a beaucoup d'effet



Présentation du nouveau modèle

La force de régularisation F_{reg}

Cette EDP de régularisation

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \text{div}\left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|}\right)$$

semble ainsi bien adaptée pour palier les problème des images bruitées.

Présentation du nouveau modèle

La force de régularisation F_{reg}

Cette EDP de régularisation

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \text{div}\left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|}\right)$$

semble ainsi bien adaptée pour palier les problème des images bruitées. On pose en fin de compte

$$F_{\text{reg}} \overset{\text{déf}}{=} g\left(|\nabla I|\right) \text{div}\left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|}\right).$$

Présentation du nouveau modèle

La force de régularisation F_{reg}

Cette EDP de régularisation

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \text{div}\left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|}\right)$$

semble ainsi bien adaptée pour palier les problème des images bruitées. On pose en fin de compte

$$F_{\text{reg}} \overset{\text{déf}}{=} g\left(|\nabla I|\right) \text{div}\left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|}\right).$$

Présentation du nouveau modèle

Le modèle final

Enfin, on combine les deux forces F_{adapt} et F_{reg} pour obtenir le modèle final proposé par les auteurs :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = g\left(|\nabla I|\right)\left(\alpha f\left(I,u\right) + \beta \text{div}\left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|}\right)\right),$$

Présentation du nouveau modèle

Le modèle final

Enfin, on combine les deux forces F_{adapt} et F_{reg} pour obtenir le modèle final proposé par les auteurs :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = g\left(|\nabla I|\right)\left(\alpha f\left(I,u\right) + \beta \text{div}\left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|}\right)\right),$$

où α et β sont des constantes de pondération respectives à chacune des deux forces.

Plan

1 Principe et inconvénients des modèles antérieurs
- Le modèle des contours actifs
- L'approche level-set des contours actifs
- Présentation d'un modèle antérieur
- Inconvénients de ce modèle

2 Présentation du nouveau modèle
- La force de guidage F_{adapt}
- La force de régularisation F_{reg}

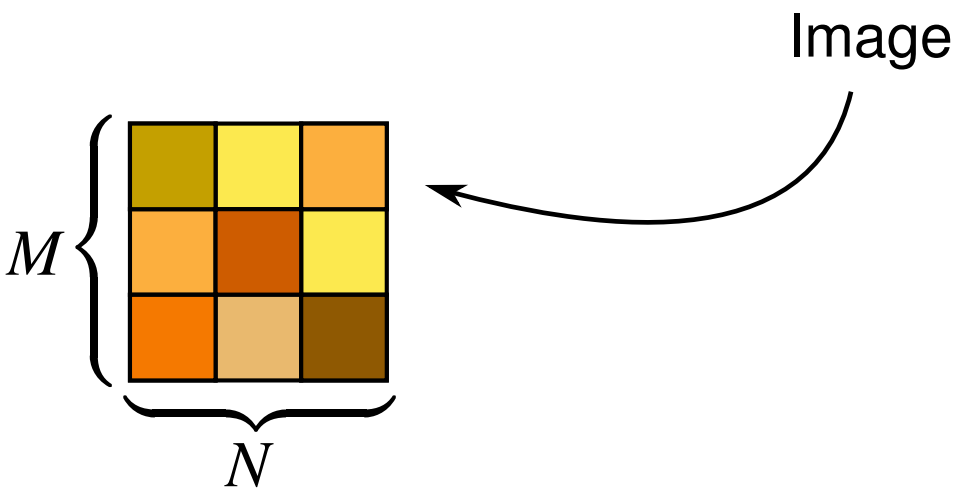
3 Implémentation du nouveau modèle et résultats expérimentaux

Implémentation du modèle

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = g\left(|\nabla I|\right)\left(\alpha f\left(I,u\right) + \beta \text{div}\left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|}\right)\right) & \text{dans } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{sur } \partial\Omega \\ u\left(x,y,0\right) = u_0\left(x,y\right) \equiv \rho & \text{dans } \Omega. \end{cases}$$

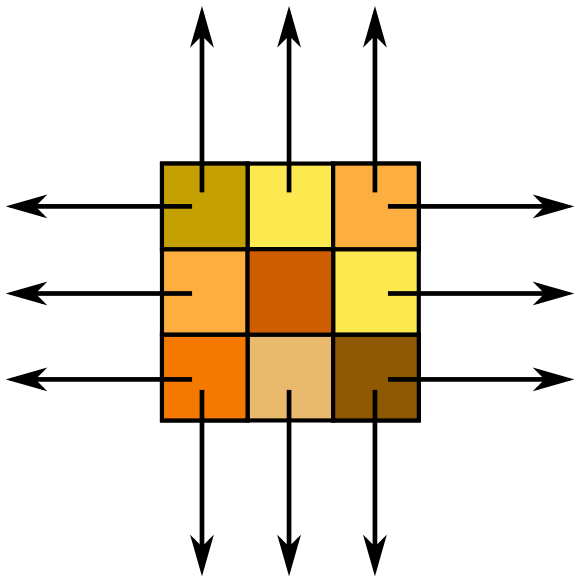
Implémentation du modèle

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = g\left(|\nabla I|\right)\left(\alpha f\left(I,u\right) + \beta \mathrm{div}\left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|}\right)\right) & \text{dans } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{sur } \partial\Omega \\ u\left(x,y,0\right) = u_0\left(x,y\right) \equiv \rho & \text{dans } \Omega. \end{cases}$$



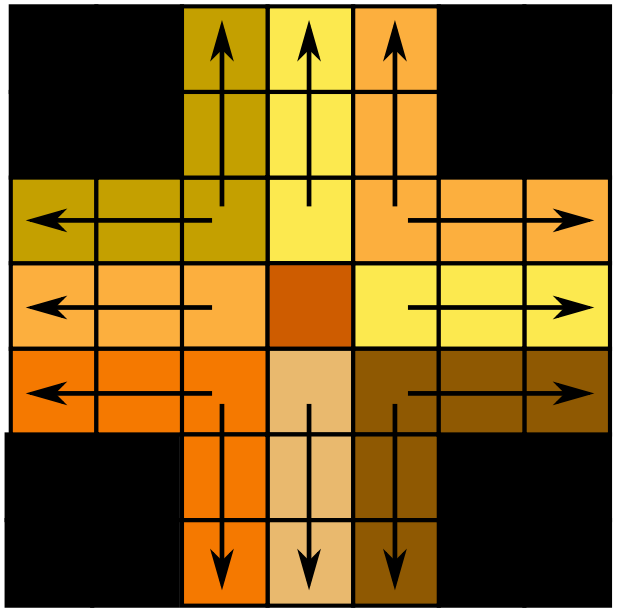
Implémentation du modèle

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = g\left(|\nabla I|\right)\left(\alpha f\left(I,u\right) + \beta \mathrm{div}\left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|}\right)\right) & \text{dans } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{sur } \partial\Omega \\ u\left(x,y,0\right) = u_0\left(x,y\right) \equiv \rho & \text{dans } \Omega. \end{cases}$$



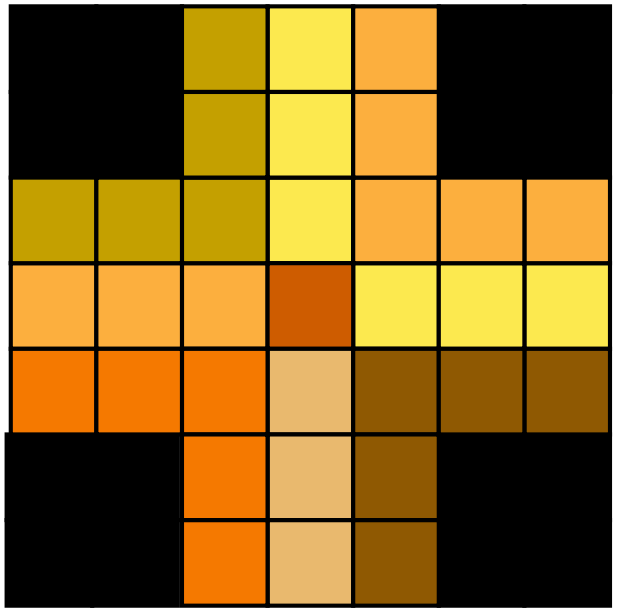
Implémentation du modèle

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = g\left(|\nabla I|\right)\left(\alpha f\left(I,u\right) + \beta \mathrm{div}\left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|}\right)\right) & \text{dans } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{sur } \partial\Omega \\ u\left(x,y,0\right) = u_0\left(x,y\right) \equiv \rho & \text{dans } \Omega. \end{cases}$$



Implémentation du modèle

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = g\left(|\nabla I|\right)\left(\alpha f\left(I,u\right) + \beta \mathrm{div}\left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|}\right)\right) & \text{dans } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{sur } \partial\Omega \\ u\left(x,y,0\right) = u_0\left(x,y\right) \equiv \rho & \text{dans } \Omega. \end{cases}$$



Implémentation du modèle

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = g\left(|\nabla I|\right)\left(\alpha f\left(I,u\right) + \beta \mathrm{div}\left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|}\right)\right) & \text{dans } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{sur } \partial\Omega \\ u\left(x,y,0\right) = u_0\left(x,y\right) \equiv \rho & \text{dans } \Omega. \end{cases}$$

```
function B=norme_grad_I(A)
    B=zeros(M+4 , N+4);
    for i=3:M+2  //parcours lignes
        for j=3:N+2  //parcours colonnes
            B(i,j) = sqrt( dx(A,i,j)^2 + dy(A,i,j)^2  );
        end
    end
endfunction
```

Implémentation du modèle

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = g\left(|\nabla I|\right)\left(\alpha f\left(I,u\right) + \beta \text{div}\left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|}\right)\right) & \text{dans } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{sur } \partial\Omega \\ u\left(x,y,0\right) = u_0\left(x,y\right) \equiv \rho & \text{dans } \Omega. \end{cases}$$

```
function y=g(x)
    y=exp(-x/20);
endfunction
```

Implémentation du modèle

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = g\left(|\nabla I|\right)\left(\alpha f\left(I,u\right) + \beta \mathrm{div}\left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|}\right)\right) & \text{dans } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{sur } \partial\Omega \\ u\left(x,y,0\right) = u_0\left(x,y\right) \equiv \rho & \text{dans } \Omega. \end{cases}$$

Implémentation du modèle

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = g\left(|\nabla I|\right)\left(\alpha f\left(I,u\right) + \beta \mathrm{div}\left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|}\right)\right) & \text{dans } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{sur } \partial\Omega \\ u\left(x,y,0\right) = u_0\left(x,y\right) \equiv \rho & \text{dans } \Omega. \end{cases}$$

$$f\left(I,u\right) = \mathrm{sign}\left(I\left(x,y\right) - \frac{c_+ - c_-}{2}\right)$$

Implémentation du modèle

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = g\left(|\nabla I|\right)\left(\alpha f\left(I,u\right) + \beta \mathrm{div}\left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|}\right)\right) & \text{dans } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{sur } \partial\Omega \\ u\left(x,y,0\right) = u_0\left(x,y\right) \equiv \rho & \text{dans } \Omega. \end{cases}$$

$$f\left(I,u\right) = \mathrm{sign}\left(I\left(x,y\right) - \frac{c_+ - c_-}{2}\right)$$

Implémentation du modèle

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = g\left(|\nabla I|\right)\left(\alpha f\left(I,u\right) + \beta \text{div}\left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|}\right)\right) & \text{dans } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{sur } \partial\Omega \\ u\left(x,y,0\right) = u_0\left(x,y\right) \equiv \rho & \text{dans } \Omega. \end{cases}$$

$$f\left(I,u\right) = \text{sign}\left(I\left(x,y\right) - \frac{c_+ - c_-}{2}\right)$$

$$c_+\left(u\right) = \begin{cases} \frac{1}{|A_+|}\int_{A_+} I & \text{si } |A_+| > 0, \\ \frac{1}{|\Omega|}\int_{\Omega} I & \text{si } |A_+| = 0. \end{cases}$$

Implémentation du modèle

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = g\left(|\nabla I|\right)\left(\alpha f\left(I,u\right) + \beta \text{div}\left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|}\right)\right) & \text{dans } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{sur } \partial\Omega \\ u\left(x,y,0\right) = u_0\left(x,y\right) \equiv \rho & \text{dans } \Omega. \end{cases}$$

$$f\left(I,u\right) = \text{sign}\left(I\left(x,y\right) - \frac{c_+ - c_-}{2}\right)$$

$$|A_+|$$

```
function z=H(x)         //fonction de Heaviside
    if x==0 | x>0 then
        z=1;
    else
        z=0;
    end
endfunction
```

Implémentation du modèle

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = g\left(|\nabla I|\right)\left(\alpha f\left(I,u\right) + \beta \text{div}\left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|}\right)\right) & \text{dans } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{sur } \partial\Omega \\ u\left(x,y,0\right) = u_0\left(x,y\right) \equiv \rho & \text{dans } \Omega. \end{cases}$$

$$f\left(I,u\right) = \text{sign}\left(I\left(x,y\right) - \frac{c_+ - c_-}{2}\right)$$

$$|A_+|$$

```
function z=int(A)      //fonction intégrale
    z=0;
    for i=3:M+2  //parcours lignes
        for j=3:N+2  //parcours colonnes
            z=z+A(i,j);
        end
    end
endfunction
```

Implémentation du modèle

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = g\left(|\nabla I|\right)\left(\alpha f\left(I,u\right) + \beta \mathrm{div}\left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|}\right)\right) & \text{dans } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{sur } \partial\Omega \\ u\left(x,y,0\right) = u_0\left(x,y\right) \equiv \rho & \text{dans } \Omega. \end{cases}$$

$$f\left(I,u\right) = \mathrm{sign}\left(I\left(x,y\right) - \frac{c_+ - c_-}{2}\right)$$

$$|A_+| = \int_\Omega H\left(u\right)\mathrm{d}x$$

Implémentation du modèle

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = g\left(|\nabla I|\right)\left(\alpha f\left(I,u\right) + \beta \mathrm{div}\left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|}\right)\right) & \text{dans } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{sur } \partial\Omega \\ u\left(x,y,0\right) = u_0\left(x,y\right) \equiv \rho & \text{dans } \Omega. \end{cases}$$

$|A_+|$

```
function z=mesure_A_plus(A)   //mesure de A+
    B=zeros(M+4 , N+4);
    for i=1:M+4
        for j=1:N+4
            B(i,j)=H(A(i,j));    //argument de l'intégrale
        end
    end
    z = int(B)   //calcul de l'intégrale
endfunction
```

Implémentation du modèle

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = g\left(|\nabla I|\right)\left(\alpha f\left(I,u\right) + \beta \mathrm{div}\left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|}\right)\right) & \text{dans } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{sur } \partial\Omega \\ u\left(x,y,0\right) = u_0\left(x,y\right) \equiv \rho & \text{dans } \Omega. \end{cases}$$

$$\int_{A_+} I = \int_{\Omega} I \cdot H\left(u\right) \mathrm{d}x$$

Implémentation du modèle

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = g\left(|\nabla I|\right)\left(\alpha f\left(I,u\right) + \beta \mathrm{div}\left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|}\right)\right) & \text{dans } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{sur } \partial\Omega \\ u\left(x,y,0\right) = u_0\left(x,y\right) \equiv \rho & \text{dans } \Omega. \end{cases}$$

```
function z=int_I_A_plus(A,B)   //int de I sur A+
    C=zeros(M+4 , N+4);
    for i=1:M+4
        for j=1:N+4
            C(i,j)=B(i,j)*H(A(i,j));    //argument de l'intégrale
        end
    end
    z = int(C)   //calcul de l'intégrale
endfunction
```

Implémentation du modèle

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = g\left(|\nabla I|\right)\left(\alpha f\left(I,u\right) + \beta \mathrm{div}\left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|}\right)\right) & \text{dans } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{sur } \partial\Omega \\ u\left(x,y,0\right) = u_0\left(x,y\right) \equiv \rho & \text{dans } \Omega. \end{cases}$$

$$c_+\left(u\right) = \begin{cases} \frac{1}{|A_+|}\int_{A_+} I & \text{si } |A_+| > 0, \\ \frac{1}{|\Omega|}\int_{\Omega} I & \text{si } |A_+| = 0. \end{cases}$$

Implémentation du modèle

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = g\left(|\nabla I|\right)\left(\alpha f\left(I,u\right) + \beta \mathrm{div}\left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|}\right)\right) & \text{dans } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{sur } \partial\Omega \\ u\left(x,y,0\right) = u_0\left(x,y\right) \equiv \rho & \text{dans } \Omega. \end{cases}$$

```
function z=c_plus(A,B)      //fonction c_plus
    if mesure_A_plus(A)==0 then
        z=int(B)/(M*N);
    else
        z=(int_I_A_plus(A,B))/(mesure_A_plus(A));
    end
endfunction
```

Implémentation du modèle

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = g\left(|\nabla I|\right)\left(\alpha f\left(I,u\right) + \beta \text{div}\left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|}\right)\right) & \text{dans } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{sur } \partial\Omega \\ u\left(x,y,0\right) = u_0\left(x,y\right) \equiv \rho & \text{dans } \Omega. \end{cases}$$

$$f\left(I,u\right) = \text{sign}\left(I\left(x,y\right) - \frac{c_+ - c_-}{2}\right)$$

Implémentation du modèle

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = g\left(|\nabla I|\right)\left(\alpha f\left(I,u\right) + \beta \mathrm{div}\left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|}\right)\right) & \text{dans } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{sur } \partial\Omega \\ u\left(x,y,0\right) = u_0\left(x,y\right) \equiv \rho & \text{dans } \Omega. \end{cases}$$

```
function C=f(A,B)           //la fonction f
    C=zeros(M+4 , N+4);
    for i=3:M+2
        for j=3:N+2
            C(i,j) = sign( B(i,j) - (1/2)*(c_plus(A,B) + c_moins(A,B)));
        end
    end
endfunction
```

Implémentation du modèle

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = g\left(|\nabla I|\right)\left(\alpha f\left(I,u\right) + \beta \mathrm{div}\left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|}\right)\right) & \text{dans } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{sur } \partial\Omega \\ u\left(x,y,0\right) = u_0\left(x,y\right) \equiv \rho & \text{dans } \Omega. \end{cases}$$

Implémentation du modèle

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = g\left(|\nabla I|\right)\left(\alpha f\left(I,u\right) + \beta \mathrm{div}\left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|}\right)\right) & \text{dans } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{sur } \partial\Omega \\ u\left(x,y,0\right) = u_0\left(x,y\right) \equiv \rho & \text{dans } \Omega. \end{cases}$$

On a un problème si $|\nabla u| = 0$

Implémentation du modèle

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = g\left(|\nabla I|\right)\left(\alpha f\left(I,u\right) + \beta \text{div}\left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|}\right)\right) & \text{dans } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{sur } \partial\Omega \\ u\left(x,y,0\right) = u_0\left(x,y\right) \equiv \rho & \text{dans } \Omega. \end{cases}$$

Pour cela, on pose pour $0 < \varepsilon \ll 1$,

$$|\nabla u|_\varepsilon = \sqrt{|\nabla u|^2 + \varepsilon^2}$$

Implémentation du modèle

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = g\left(|\nabla I|\right)\left(\alpha f\left(I,u\right) + \beta \text{div}\left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|}\right)\right) & \text{dans } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{sur } \partial\Omega \\ u\left(x,y,0\right) = u_0\left(x,y\right) \equiv \rho & \text{dans } \Omega. \end{cases}$$

Pour approximer les dérivées partielles, on utilise des différences finies centrées : pour $0 < h \ll 1$,

$$D^x_{i,j} u = \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2h}$$

$$D^y_{i,j} u = \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{2h}$$

Implémentation du modèle

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = g\left(|\nabla I|\right)\left(\alpha f\left(I,u\right) + \beta \,\mathrm{div}\left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|}\right)\right) & \text{dans } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{sur } \partial\Omega \\ u\left(x,y,0\right) = u_0\left(x,y\right) \equiv \rho & \text{dans } \Omega. \end{cases}$$

$$\mathrm{div}\left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|}\right)_{i,j} = D^x_{i,j}\left(\frac{D^x_{i,j}u}{\sqrt{\left(D^x_{ij}u\right)^2 + \left(D^y_{ij}u\right)^2 + \varepsilon^2}}\right) + D^y_{i,j}\left(\frac{D^y_{i,j}u}{\sqrt{\left(D^x_{ij}u\right)^2 + \left(D^y_{ij}u\right)^2 + \varepsilon^2}}\right)$$

Implémentation du modèle

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = g\left(|\nabla I|\right)\left(\alpha f\left(I,u\right) + \beta \mathrm{div}\left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|}\right)\right) & \text{dans } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{sur } \partial\Omega \\ u\left(x,y,0\right) = u_0\left(x,y\right) \equiv \rho & \text{dans } \Omega. \end{cases}$$

Implémentation du modèle

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = g\left(|\nabla I|\right)\left(\alpha f\left(I,u\right) + \beta \text{div}\left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|}\right)\right) & \text{dans } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{sur } \partial\Omega \\ u\left(x,y,0\right) = u_0\left(x,y\right) \equiv \rho & \text{dans } \Omega. \end{cases}$$

On utilise des différences finies *forward* pour estimer les dérivées en temps : pour $0 < dt \ll 1$,

$$D^t_{i,j} u^{(n)} = \frac{u^{(n+1)}_{i,j} - u^{(n)}_{i,j}}{dt}$$

Implémentation du modèle

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = g\left(|\nabla I|\right)\left(\alpha f\left(I,u\right) + \beta \text{div}\left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|}\right)\right) & \text{dans } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{sur } \partial\Omega \\ u\left(x,y,0\right) = u_0\left(x,y\right) \equiv \rho & \text{dans } \Omega. \end{cases}$$

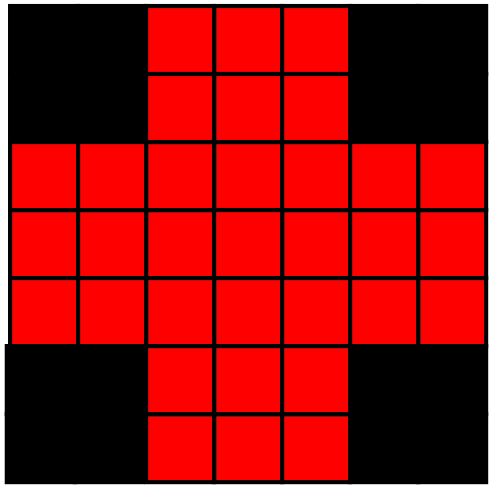
On trouve donc :

$$u_{i,j}^{(n+1)} = u_{i,j}^{(n)} + dt \times g\left(|\nabla u|\right) \times \left(\alpha f\left(I_{i,j}, u_{i,j}^{(n)}\right) + \beta \text{div}\left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|}\right)_{i,j}^{(n)}\right)$$

Implémentation du modèle

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = g\left(|\nabla I|\right)\left(\alpha f\left(I,u\right) + \beta \mathrm{div}\left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|}\right)\right) & \text{dans } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{sur } \partial\Omega \\ u\left(x,y,0\right) = u_0\left(x,y\right) \equiv \rho & \text{dans } \Omega. \end{cases}$$

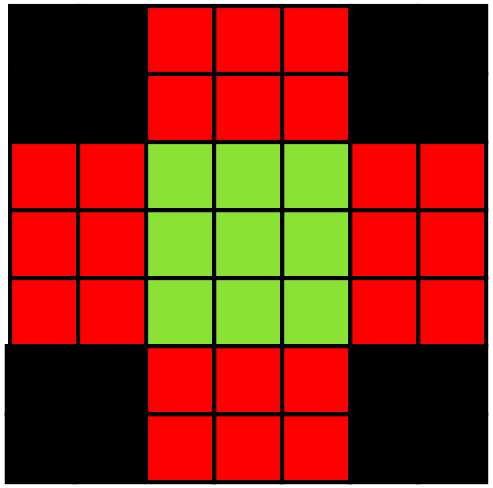
On prend pour condition initiale une fonction u_p identiquement égale à ρ



Implémentation du modèle

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = g\left(|\nabla I|\right)\left(\alpha f\left(I,u\right) + \beta \mathrm{div}\left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|}\right)\right) & \text{dans } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{sur } \partial\Omega \\ u\left(x,y,0\right) = u_0\left(x,y\right) \equiv \rho & \text{dans } \Omega. \end{cases}$$

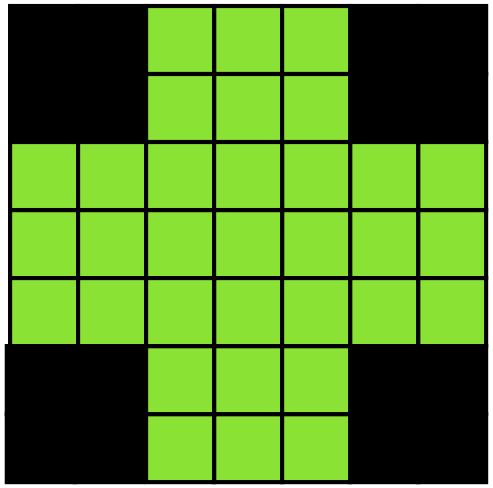
On prend pour condition initiale une fonction u_p identiquement égale à ρ puis on calcule la solution u sur le domaine de l'image.



Implémentation du modèle

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = g\left(|\nabla I|\right)\left(\alpha f\left(I,u\right) + \beta \mathrm{div}\left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|}\right)\right) & \text{dans } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{sur } \partial\Omega \\ u\left(x,y,0\right) = u_0\left(x,y\right) \equiv \rho & \text{dans } \Omega. \end{cases}$$

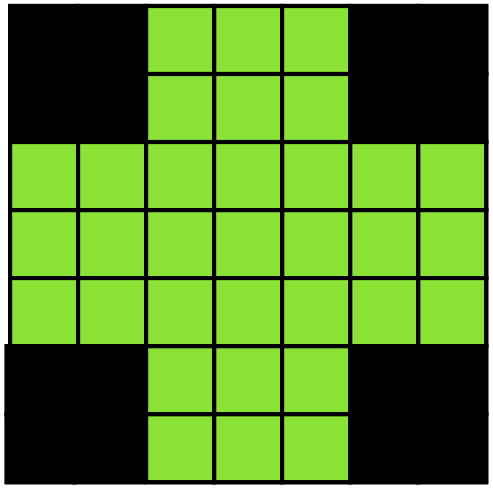
Enfin, on attribue les valeurs sur les bords par réflexion pour avoir la condition de Neumann.



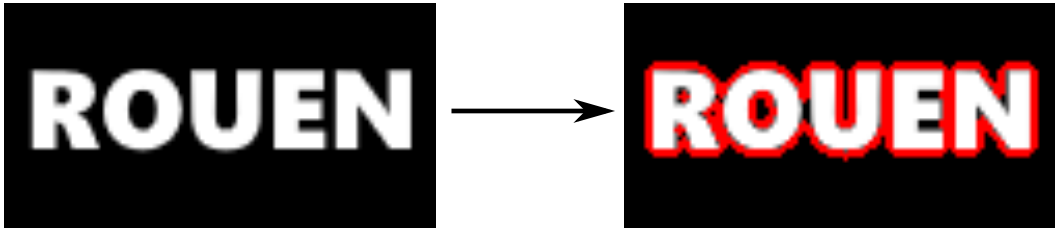
Implémentation du modèle

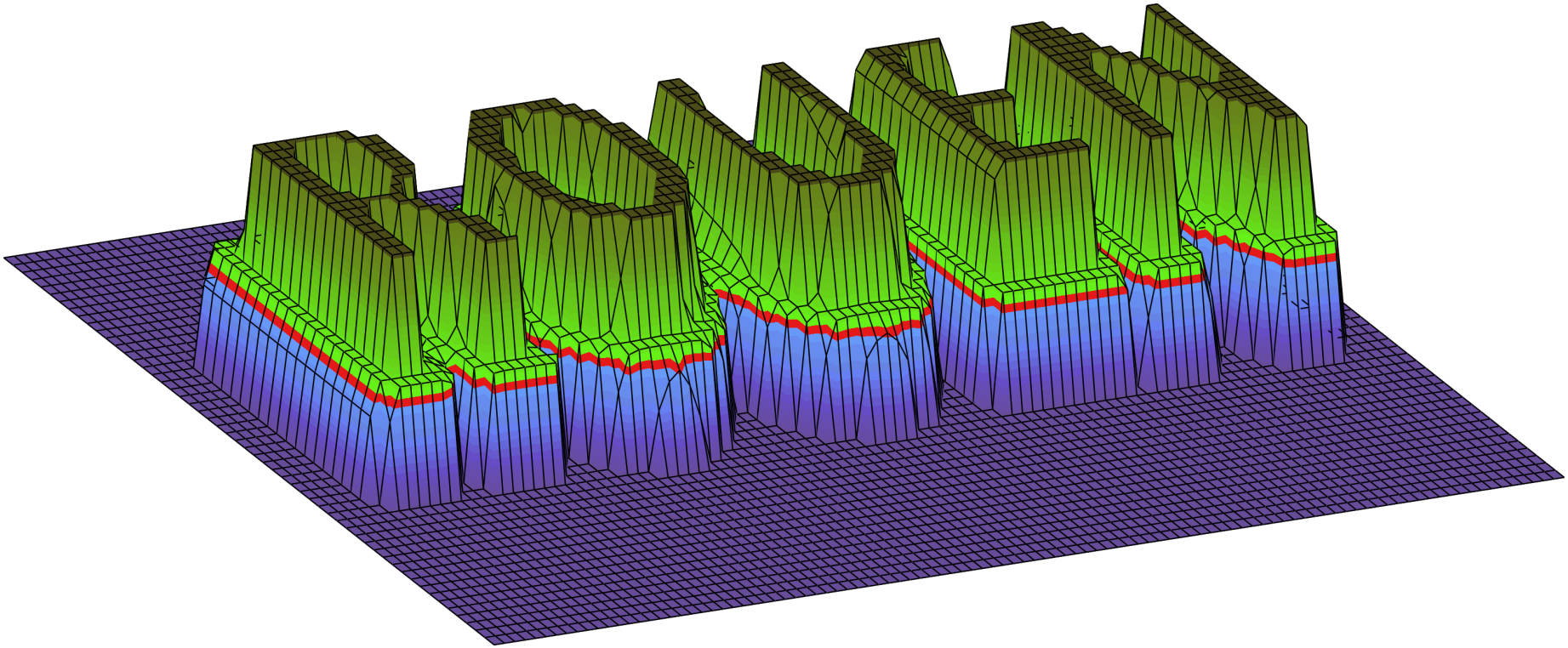
$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = g\left(|\nabla I|\right)\left(\alpha f\left(I,u\right) + \beta \text{div}\left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|}\right)\right) & \text{dans } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{sur } \partial\Omega \\ u\left(x,y,0\right) = u_0\left(x,y\right) \equiv \rho & \text{dans } \Omega. \end{cases}$$

On recommence ce processus en prenant $u_p = u$ jusqu'à ce qu'on soit satisfait de l'approximation de la fonction level-set.



Implémentation du modèle





Bibliographie

[1] L. I. Rudin, S. Osher et E. Fatemi, “Nonlinear total variation based noise removal algorithms,” *Physica D : nonlinear phenomena*, vol. 60, n°. 1-4, p. 259–268, 1992.

[2] Y. Wang et C. He, “Adaptive level set evolution starting with a constant function,” *Applied Mathematical Modelling*, vol. 36, n°. 7, p. 3217–3228, 2012.

[3] V. Caselles, F. Catté, T. Coll et F. Dibos, “A geometric model for active contours in image processing,” *Numerische mathematik*, vol. 66, n°. 1, p. 1–31, 1993.

Plan

1 Principe et inconvénients des modèles antérieurs
- Le modèle des contours actifs
- L'approche level-set des contours actifs
- Présentation d'un modèle antérieur
- Inconvénients de ce modèle

2 Présentation du nouveau modèle
- La force de guidage F_{adapt}
- La force de régularisation F_{reg}

3 Implémentation du nouveau modèle et résultats expérimentaux