

Conditionnement : $\left[\begin{array}{l} (A \in GL_n(\mathbb{R})) \\ b \neq 0 \end{array} \right]$ donc $x \neq 0$

$$Ax = b \quad (*)$$

↳ Perturbation de l'inconnue et du second membre...

$$A(x + \Delta x) = b + \Delta b$$

$$(*) \rightarrow A \Delta x = \Delta b$$

$$\Delta x = A^{-1} \cdot \Delta b$$

$$\|\Delta x\| = \|A^{-1} \cdot \Delta b\|$$

$$(**) \rightarrow \|\Delta x\| \leq \|A^{-1}\| \times \|\Delta b\|$$

$$x \neq 0 \rightarrow \frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \|A^{-1}\| \times \|\Delta b\| \times \frac{1}{\|x\|}$$

$$\text{OR } Ax = b \text{ donc } \|b\| = \|Ax\| \leq \|A\| \times \|x\|$$
$$\text{donc } \frac{1}{\|x\|} \leq \frac{\|A\|}{\|b\|} \quad \} (**)$$

$$(***) \rightarrow \frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \underbrace{\|A^{-1}\| \times \|A\|}_{=: \text{cond}(A)} \times \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|}$$

ERREUR relative sur la solution contrôlée par $\text{cond}(A)$

Fois erreur relative sur le second membre...

↳ $\text{cond}(A)$ petit $\rightarrow \infty$

↳ $\text{cond}(A)$ grand $\rightarrow \infty$

$$\text{OR } \|A^{-1}\| = \sup_{y \neq 0} \frac{\|Ay\|}{\|y\|}$$

$$\text{donc } \frac{\|Ay\|}{\|y\|} \leq \|A^{-1}\| \quad \forall y \neq 0$$

$$\text{donc } \|Ay\| \leq \|A^{-1}\| \times \|y\| \quad \forall y \neq 0$$

(***)