Fiche 2 - Suite numériques

Ex 1 :

Soient $n_0 \in \mathbb{N}$ et

$(u_n)_{n \geq n_0}$ arithmétique de raison $r \in \mathbb{R}$. (*)

a) MQ $\forall n \geq n_0, \quad u_n = u_{n_0} + r(n-n_0)$.

Pour $n \geq n_0$, posons $\mathcal{H}(n)$: $u_n = u_{n_0} + r(n-n_0)$.

(I) Pour $n = n_0$, $u_{n_0} + r(n_0 - n_0) = u_{n_0}$ donc $\mathcal{H}(n_0)$ vraie.

(H) Soit $n \geq n_0$, supposons $\mathcal{H}(n)$ vraie.

$$\text{Alors } u_{n_0} + r(n+1-n_0) = \underbrace{u_{n_0} + r(n-n_0)}_{= u_n \text{ par HR}} + r = u_n + r \overset{(*)}{=} u_{n+1}$$

Ainsi $\mathcal{H}(n+1)$ est vraie, et donc $\mathcal{H}(n)$ vraie $\forall n \geq n_0$. □

b) Soit $n \geq n_0$, on a

$$\sum_{k=n_0}^{n} u_k = \sum_{k=n_0}^{n} u_{n_0} + r(k-n_0) \overset{i=k-n_0}{=} \sum_{i=0}^{n-n_0} u_{n_0} + ri$$

$$= \sum_{i=0}^{n-n_0} u_{n_0} + r \sum_{i=0}^{n-n_0} i = (n-n_0+1)u_{n_0} + r(n-n_0+1)\frac{n-n_0}{2}$$

$$= (n-n_0+1)\frac{2u_{n_0} + r(n-n_0)}{2} = (n-n_0+1)\frac{u_{n_0} + \overbrace{u_{n_0} + r(n-n_0)}^{u_n}}{2}$$

$$= (n-n_0+1)\frac{u_{n_0} + u_n}{2} = (n-n_0+1)\left(u_{n_0} + \frac{r(n-n_0)}{2}\right)$$ □

c) i) $u_n = 5 + 2n$

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = (n+1)(5+n)$$

ii) $u_n = -3 + 4(n-1) = -7 + 4n$

$$\sum_{k=1}^{n} u_k = -7 + 4\,\frac{n(n+1)}{2}$$

iii) $u_n = 7 + 2i + (2+i)(n-2)$

$$\sum_{k=2}^{n} u_n = (n-1)\left(7 + 2i + \frac{(2+i)\,n-2}{2}\right) = \cdots \text{ (développer...)}$$

Ex 2 :

a) Pour $n \geq n_0$, $\mathcal{P}(n)$: $u_n = u_{n_0} \times q^{n-n_0}$.

(I) $u_{n_0} \times q^{n_0 - n_0} = u_{n_0} \times q^0 = u_{n_0} \times 1 = u_{n_0}$ donc $\mathcal{P}(n_0)$ vraie.

(H) Soit $n \geq n_0$, supp. $\mathcal{P}(n)$ vraie,

$u_{n_0} \times q^{n+1-n_0} = u_{n_0} \times q^{n-n_0} \times q = u_n \times q = u_{n+1}$ donc $\mathcal{P}(n+1)$ vraie.

Ainsi, $\mathcal{P}(n)$ vraie $\forall n \geq n_0$.

b) Soit $q \neq 1$, (sinon somme triviale...)

Pour $n \geq n_0$, $S_n := \sum_{k=n_0}^{n} u_k$.

↳ Faire le changement d'indice $i = k - n_0$

↳ Puis aller voir Ex 2 fiche 1... $S_n = u_{n_0} \times \dfrac{1 - q^{n-n_0+1}}{1-q}$.

c) i) $u_n = 7 \times 3^n$

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = 7 \times \frac{1-3^{n+1}}{1-3} = \frac{7}{2}\left(3^{n+1}-1\right).$$

ii) $u_n = 8 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 16 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n = 2^4 \times 2^{-n} = 2^{4-n}$

$$\sum_{k=1}^{n} u_k = 16 \times \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-1/2} = 8 \times \left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$$

Ex 3 :

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$: $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{1+2u_n} \end{cases}$

Pour $n \in \mathbb{N}$, $v_n := \frac{1}{u_n}$

a) MQ $u_n > 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$: « $u_n > 0$ »

(I) TRIVIAL.

(H) Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $\mathcal{P}(n)$ vrai.

Alors $u_n > 0$ donc $1+2u_n > 0$

Alors $\dfrac{u_n}{1+2u_n} = u_{n+1} > 0$.

Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

$\hookrightarrow$ Ainsi $u_n > 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$ et $v_n > 0$ est bien définie (pas de $\frac{1}{0}$ ...)

b) MQ $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique. Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n} = \frac{1+2u_n}{u_n} - \frac{1}{u_n} = \frac{2\cancel{u_n}}{\cancel{u_n}} = 2.$$

Ainsi, $v_{n+1} = v_n + 4$ $\forall n \in \mathbb{N}$ donc (v_n) est arithmétique.

c) $u_0 = 1$ donc $v_0 = 1$.

Donc $v_n = 1 + 4n$, c-à-d. $u_n = \frac{1}{1+4n}$.

Ex 4 :

$n \geq 0$, $a_n = e^n + n^2 + 3n$ donc $(a_n) \nearrow$

chacune est croissante

$n \geq 0$, $b_n = n + \frac{1}{3^n}$

$$b_{n+1} - b_n = \cancel{n} + 1 + \frac{1}{3^{n+1}} - \cancel{n} - \frac{1}{3^n}$$

$$= 1 + \frac{1}{3^{n+1}} - \frac{1}{3^n}$$

$$= \frac{3^n + 1/3 - 1}{3^n}$$

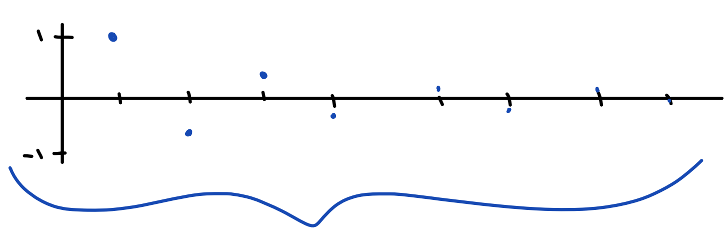
$$> \frac{1/3}{3^n} > 0$$ donc $(b_n) \nearrow$.

$n > 0$, $c_n = \frac{2^n}{n}$.

$$\frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{2^{n+1}}{n+1} \times \frac{n}{2^n} = 2 \times \frac{n}{n+1} = \frac{2n}{n+1}.$$

Or $n \geq 1$ donc $2n \geq n+1$ donc $\frac{c_{n+1}}{c_n} \geq 1$ donc $(c_n) \nearrow$

$n \geq 1$, $d_n = \frac{(-1)^n}{n}$



non monotone !

$$d_{n+1} - d_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} - \frac{(-1)^n}{n} = \begin{cases} -\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} < 0 & \text{si } n \text{ pair} \\ \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n} > 0 & \text{si } n \text{ impair.} \end{cases}$$

Donc (d_n) n'est pas monotone...

$n \geqslant 0$, $\quad e_n = \dfrac{2n-1}{3n+2} \qquad f : \begin{cases} \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \frac{2x-1}{3x+2} \end{cases} \qquad f$ continue, dérivable,

$$f'(x) = \frac{2(\cancel{3n}+2) - 3(\cancel{2n}-1)}{(3n+2)^2} = \frac{7}{(-)^2} > 0$$

Donc $f \nearrow$, en particulier, $(u_n) = (f(n)) \nearrow$.

$n \geqslant 1 \qquad f_n = \dfrac{2^n}{n!}$

$$\frac{f_{n+1}}{f_n} = \frac{2 \times \cancel{2^n}}{\cancel{n!} \times (n+1)} \times \frac{\cancel{n!}}{\cancel{2^n}} = \frac{2}{n+1}$$

or $n \geqslant 1$ donc $n+1 \geqslant 2$ donc $\dfrac{f_{n+1}}{f_n} \leqslant 1$ donc $(f_n) \searrow$.

$n \geqslant 1$, $\quad g_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$, $\qquad g_{n+1} - g_n = \dfrac{1}{n+1} > 0 \qquad$ donc $(g_n) \nearrow$.

$n \geqslant 1$, $\quad h_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{2k}$

$$\frac{h_{n+1}}{h_n} = \frac{\prod_{k=1}^{n+1} \frac{2k-1}{2k}}{\prod_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{2k}} = \frac{2(n+1)-1}{2(n+1)} < 1 \qquad \text{donc } (h_n) \searrow.$$

$n \geq 1, \quad i_n = \frac{n!}{n^n}$

$$\frac{i_{n+1}}{i_n} = \frac{\cancel{(n+1)}\, n!}{(n+1)^{\cancel{n+1}}} \times \frac{n^n}{n!} = \frac{n^n}{(n+1)^n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n < 1$$ donc $(i_n) \searrow$

$n \geq 0, \quad j_n = n + \sin(n)$

$$j_{n+1} - j_n = (n+1) + \sin(n+1) - n - \sin(n)$$
$$= 1 + \sin(n+1) - \sin(n)$$

$\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a)$

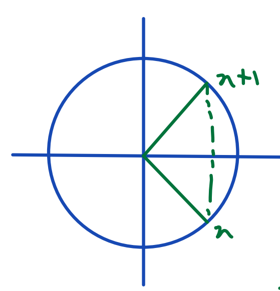
$f : x \mapsto \sin(x+1) - \sin(x)$ on cherche les minima de f qui pourraient faire que

$1 + \sin(n+1) - \sin(n) < 0$...

f continue dérivable sur $\mathbb{R}$,

$f'(x) = \cos(x+1) - \cos(x)$

$f'(x) = 0 \iff \cos(x+1) = \cos(x)$



INTUITION : il y a une symétrie cachée...

$$f'(x) = \cos\left(x + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) - \cos\left(x + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right)$$

$\cos(a \pm b) = \cos(a)\cos(b) \mp \sin(a)\sin(b)$

Donc $f'(x) = 0 \iff \cos(x+1) = \cos(x)$

$$\iff \cos\left(x+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right) = \cos\left(x + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right)$$

$$\iff \cos\left(x+\frac{1}{2}\right)\cos\left(\frac{1}{2}\right) - \sin\left(x+\frac{1}{2}\right)\sin\left(\frac{1}{2}\right) = \cos\left(x+\frac{1}{2}\right)\cos\left(\frac{1}{2}\right) + \sin\left(x+\frac{1}{2}\right)\sin\left(\frac{1}{2}\right)$$

$\Longleftrightarrow 2\sin\left(x+\frac{1}{2}\right)\sin\left(\frac{1}{2}\right)=0 \Longleftrightarrow \sin\left(x+\frac{1}{2}\right)=0 \Longleftrightarrow x+\frac{1}{2}=k\pi \quad (k\in\mathbb{Z})$

$\Longleftrightarrow x = k\pi-\frac{1}{2} \quad (k\in\mathbb{Z})$ (on peut vérifier sur geogebra...)

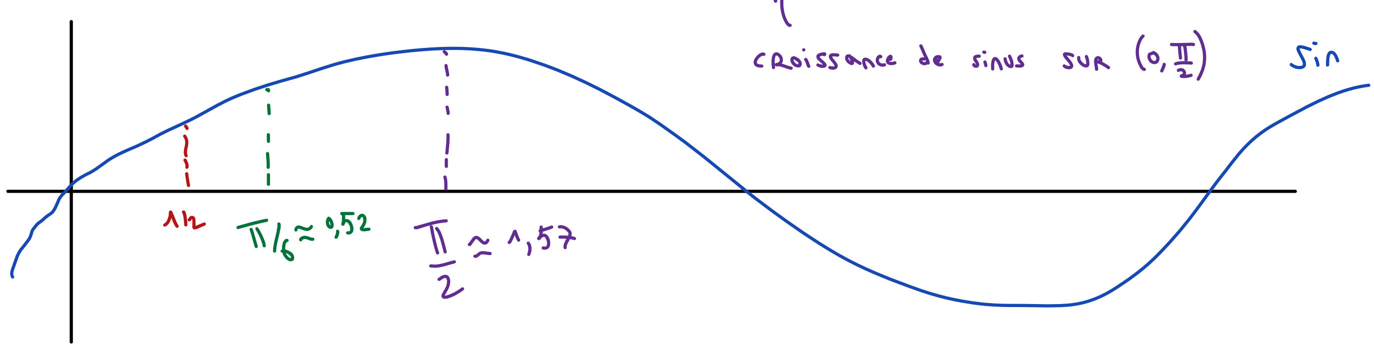
ok

Évaluons : $f\left(k\pi-\frac{1}{2}\right)=\underbrace{\sin\left(k\pi+\frac{1}{2}\right)-\sin\left(k\pi-\frac{1}{2}\right)}$

il suffit de savoir combien ça fait pour $k=0$ et $k=1$ (le reste se déduit par périodicité)

$\hookrightarrow \sin\left(\frac{1}{2}\right)-\sin\left(-\frac{1}{2}\right)=2\sin\left(\frac{1}{2}\right)\leqslant 2\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)=1.$

croissance de sinus sur $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$



$\hookrightarrow \sin\left(\pi+\frac{1}{2}\right)-\sin\left(\pi-\frac{1}{2}\right)$ (or $\sin(\pi+x)=-\sin(x)$)

$=-\sin\left(\frac{1}{2}\right)-\left(-\sin(-1/2)\right)$

$=-\sin\left(\frac{1}{2}\right)-\sin\left(1/2\right)$

$=-2\sin\left(1/2\right)$

>-1 (même raisonnement que pour $k=0$...)

Ainsi, $f(x)>-1$ donc $j_{n+1}-j_n=1+\sin(n+1)-\sin(n)>0$ donc $(j_n)\nearrow$.

$n \geq 0, \quad k_n = \sqrt{n} + (-1)^n \geq 0$

$$\frac{k_{n+1}}{k_n} = \frac{\sqrt{n+1} + (-1)^{n+1}}{\sqrt{n} + (-1)^n} = \frac{\left(\sqrt{n+1} + (-1)^{n+1}\right)\left(\sqrt{n} - (-1)^n\right)}{\left(\sqrt{n} + (-1)^n\right)\left(\sqrt{n} - (-1)^n\right)} = \frac{\left(\sqrt{n+1} + (-1)^{n+1}\right)\left(\sqrt{n} - (-1)^n\right)}{n-1}$$

$$= \frac{\sqrt{n(n+1)} + (-1)^n\sqrt{n+1} + (-1)^{n+1}\sqrt{n} + (-1)^{\overbrace{2n+1}^{\text{impair}}}}{n-1}$$

$$= \frac{\sqrt{n(n+1)} + (-1)^n\sqrt{n+1} + (-1)^{n+1}\sqrt{n} - 1}{n-1}$$

↳ Si n pair :

$$\frac{k_{n+1}}{k_n} = \frac{\sqrt{n(n+1)} + \overbrace{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}^{\geq 0} - 1}{n-1}$$

$$\geq \frac{\sqrt{n^2+n} - 1}{n-1} > \frac{\sqrt{n^2} - 1}{n-1} = 1.$$

↳ Si n impair :

$$\frac{k_{n+1}}{k_n} = \frac{\sqrt{n(n+1)} - \sqrt{n+1} + \sqrt{n} - 1}{n-1}$$

Si je montre que $\bullet \geq n$ c'est gagné!

On a, successivement :

$$\sqrt{n(n+1)} - \sqrt{n+1} + \sqrt{n} \geq n > 0$$

$$\iff \underbrace{n(\cancel{n}+1) + (n+1) + n}\, - 2\sqrt{n}(n+1) - 2\sqrt{n}\sqrt{n+1} + 2n\sqrt{n+1} \geq n^2$$

$$\iff 3n + 1 + 2\left(n\sqrt{n+1} - (n+1)\sqrt{n} - \sqrt{n}\sqrt{n+1}\right) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 3n+1+2\Big(\underbrace{n\sqrt{n+1}-n\sqrt{n}}_{>0 \text{ et on perd pas bcp à le lâcher...}}-\sqrt{n}-\sqrt{n}\sqrt{n+1}\Big)\geq 0$$

$$\Leftarrow \quad 3n+1-2\sqrt{n}\left(1+\sqrt{n+1}\right)\geq 0$$

$$\Leftarrow \quad 3n+1-2\sqrt{n+1}\left(1+\sqrt{n+1}\right)\geq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 3n+1-2(n+1)-2\sqrt{n+1}\geq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad n+1-2-2\sqrt{n+1}\geq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad n-2\sqrt{n+1}-1\geq 0$$

$$f(x)=x-2\sqrt{x+1}-1 \qquad \underbrace{f'(x)=1-\frac{1}{\sqrt{x+1}}}$$

$$x>0 \Rightarrow x+1>1 \Rightarrow \sqrt{x+1}>1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x+1}}<1 \Rightarrow -\frac{1}{\sqrt{x+1}}>1 \Rightarrow f'(x)>0.$$

Donc $f \nearrow$ et on peut voir que $f(3)=0$.

Donc pour $n\geq 3$, $n-2\sqrt{n+1}-1\geq 0$ est vrai.

↳ <u>Conclusion:</u> On a la croissance de (k_n) à partir de $n=2$.

Maintenant:

$$k_0=1>\underbrace{k_1=0<k_2}_{\text{donc } (k_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \nearrow}=\sqrt{2}-1\approx 0{,}41$$

Ex 5 :

i) $n \geqslant 0, \quad u_n = \dfrac{n}{2n+3}$

$u_n > 0$ CLAIR

$u_n \leqslant \dfrac{2n+3}{2n+3} < 1$

Donc (u_n) bornée.

(ii) $n \geqslant 0, \quad u_n = n(-1)^n = \begin{cases} n & \text{si } n \text{ pair} \\ -n & \text{si } n \text{ impair.} \end{cases}$

(u_n) non-bornée.

(iii) $n \geqslant 0, \quad u_n = 2\cos(n) - 10\sin(n)$

$-1 \leqslant \cos, \sin \leqslant 1$

Donc $-12 \leqslant u_n \leqslant 12$

Donc (u_n) bornée.

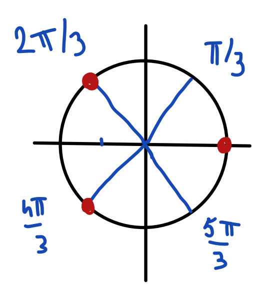
(iv) $n \geqslant 0, \quad u_n = \sqrt{n} - \lfloor \sqrt{n} \rfloor$

$a-1 \leqslant \lfloor a \rfloor \leqslant a+1$

donc $-1 \leqslant u_n \leqslant 1$ donc (u_n) bornée.

(v) $n \geqslant 0, \quad u_n = \dfrac{n}{2} + n\cos\left(\dfrac{2n\pi}{3}\right)$

$$= \begin{cases} \dfrac{n}{2} - \dfrac{n}{2} & \text{si } n \equiv 1\,[3] \\ \dfrac{n}{2} - \dfrac{n}{2} & \text{si } n \equiv 2\,[3] \\ \dfrac{n}{2} & \text{si } n \equiv 3\,[3] \end{cases}$$



$$= \begin{cases} 0 & \text{si } n \equiv 0\,[3] \\ \dfrac{n}{2} & \text{si } n \not\equiv 0\,[3] \end{cases}$$

donc (u_n) minorée, pas majorée donc non-bornée.

Ex 6 :

↳ $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bornées (i.e. $|u_n| < M_1$ et $|v_n| < M_2$ $\forall n \in \mathbb{N}$)

$$|u_n \times v_n| = |u_n| \times |v_n| \leqslant M_1 \times M_2 =: M_3 < \infty$$

↳ $u_n = -1$ est minorée, $v_n = n$ est minorée $\Big\}$ $u_n \times v_n = -n$ n'est pas minorée.

Ex 7 :

i) $(u_n)_{n\geqslant 1} = \left(\frac{1}{n^2}\right)_{n\geqslant 1}$. $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$. En effet,

Soit $\varepsilon > 0$, (MQ $\exists N \in \mathbb{N}^* / \forall n > N$, $|u_n| < \varepsilon$)

$$\frac{1}{n^2} < \varepsilon \Leftrightarrow n^2 > \varepsilon > 0 \Leftrightarrow n > \sqrt{\varepsilon} =: N.$$

ii) $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\sqrt{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$. $\lim_{n\to\infty} v_n = +\infty$. En effet,

Soit $M > 0$ (MQ $\exists N \in \mathbb{N} / \forall n > N$, $v_n > M$)

$$v_n > M \Leftrightarrow \sqrt{n} > M \Leftrightarrow n > M^2 =: N.$$

Ex 8 :

a) VRAI : $\lim_{\infty} u_n = 1 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$, APCR, $|u_n - 1| < \varepsilon$

$\Rightarrow$ Pour $\varepsilon = 10^{-3}$, APCR, $1 - \varepsilon \leqslant u_n \leqslant 1 + \varepsilon$

b) FAUX $u_n = 1 - \frac{1}{n}$.

c) FAUX $u_n = 1 - \frac{1}{n}$

d) VRAI : $\lim\limits_{\infty} u_n = +\infty \iff \forall M > 0, \exists N \in \mathbb{N} / \forall n > N, u_n > M$

On se donne $M > 0$, la définition nous donne un N, et alors

$$u_n \geqslant \min\left(\min_{k \in [\![0,N]\!]} u_k \,;\, M \right) > -\infty.$$

Donc (u_n) minorée.

e) FAUX $u_n = \begin{cases} n^2 & \text{si } n \text{ pair} \\ n & \text{si } n \text{ impair.} \end{cases}$

➤ Ex 9 :

a) $$a_n = 10^{10} n^4 - n^5 + 3 = \underbrace{n^5}_{\to +\infty} \underbrace{\left(\frac{10^{10}}{n} - 1 + \frac{3}{n^5} \right)}_{\to -1} \longrightarrow -\infty$$

$$b_n = \frac{3n+1}{2n+4} = \frac{\cancel{n}(3+\frac{1}{n})}{\cancel{n}(2+4/n)} = \frac{3+1/n}{2+4/n} \longrightarrow \frac{3}{2}.$$

$$c_n = \frac{n^3+1}{n^5+n+2} = \frac{\cancel{n^5}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^5}\right)}{\cancel{n^5}\left(1+\frac{1}{n^4}+\frac{2}{n^5}\right)} \longrightarrow \frac{0}{1} = 0.$$

b) $d_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

$$= \frac{\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+1} + \sqrt{n}\right)}{\left(\sqrt{n+1} + \sqrt{n}\right)} = \frac{n+1-n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \xrightarrow{n \to \infty} 0.$$

$e_n = \sqrt{n^2 + 4n + 1} - n$

$$= \frac{\left(\sqrt{n^2+4n+1} - n\right)\left(\sqrt{n^2+4n+1} + n\right)}{\left(\sqrt{n^2+4n+1} + n\right)} = \frac{\cancel{n^2} + 4n + 1 - \cancel{n^2}}{\sqrt{n^2+4n+1} + n} = \frac{4n+1}{\sqrt{n^2+4n+1} + n}$$

$$= \frac{n(4 + 1/n)}{\sqrt{n^2(1 + 4/n + 1/n^2)} + n} = \frac{\cancel{n}(4 + 1/n)}{\cancel{n}\left(\sqrt{1 + 4/n + 1/n^2} + 1\right)} \xrightarrow{n \to \infty} 2.$$

c) $f_n = 3 \times (-2)^n + (-2) \times 3^n$

$$= 3^n \underbrace{\Big(\underbrace{3 \times \left(\tfrac{-2}{3}\right)^n}_{\to 0} - 2 \Big)}_{\to -2} \longrightarrow -\infty.$$

$$g_n = \frac{2^n + 1}{5^{-n} - 3^{-n}} = \frac{2^n + 1}{\frac{1}{5^n} - \frac{1}{3^n}} = \frac{2^n + 1}{\frac{3^n - 5^n}{15^n}} = \frac{15^n (2^n + 1)}{3^n - 5^n} = \frac{30^n + 15^n}{3^n - 5^n} = \frac{\cancel{30^n}\left(1 + \left(\frac{15}{30}\right)^n\right)}{\cancel{30^n}\left(\left(\frac{3}{30}\right)^n - \left(\frac{5}{30}\right)^n\right)}$$

$$= \frac{1 + \left(\frac{15}{30}\right)^n}{\underbrace{\left(\frac{3}{30}\right)^n - \left(\frac{5}{30}\right)^n}_{\leq 0}} \xrightarrow{n \to \infty} \frac{1}{0^-} = -\infty.$$

d) $h_n = \frac{(-1)^n}{n}$ $\qquad |h_n| = \frac{1}{n} \longrightarrow 0$ $\qquad$ donc $h_n \longrightarrow 0.$

$$i_n = \frac{(-1)^n n^2 - 2n + 3}{n^3 + n^2 + 1} = \frac{\cancel{n^3}\left(\frac{(-1)^n}{n} - 2/n^2 + 3/n^3\right)}{\cancel{n^3}\left(1 + 1/n + 1/n^3\right)} \xrightarrow{n \to \infty} \frac{0}{1} = 0.$$

$$j_n = 2n + (-1)^n n = \begin{cases} 3n & \text{si } n \text{ pair} \longrightarrow +\infty \\ n & \text{si } n \text{ impair} \longrightarrow +\infty \end{cases}$$

donc $\lim\limits_{n\to\infty} j_n = +\infty$.

➤ Ex 10 : (Densité des rationnels)

Soit $x \in \mathbb{R}$, et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*} := \left(\frac{\lfloor nx \rfloor}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

MQ $x_n \xrightarrow{n\to\infty} x$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$nx - 1 \leqslant \lfloor nx \rfloor \leqslant nx + 1$$

$$\underset{\downarrow \, x}{x - \frac{1}{n}} \leqslant \frac{nx-1}{n} \leqslant \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \leqslant \frac{nx+1}{n} = \underset{\downarrow \, x}{x + 1/n}$$

Ainsi, $\frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \xrightarrow{n\to\infty} x$.

$\forall x \in \mathbb{R}$, on a $(x_n) \subset \mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \in \mathbb{R} \,/\, a \in \mathbb{Z} \text{ et } b \in \mathbb{N}^* \right\}$

et $x_n \xrightarrow{n\to\infty} x$.

Donc $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

➤ Ex 11 : Pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$S_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+k}}$$

Pour tout $k \in [\![1;n]\!]$, $n < \sqrt{n^2+k} < \sqrt{n^2+n}$.

Donc

$$\frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{n^2+k}} \leqslant \frac{1}{n}$$

D'où

$$\underbrace{\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}}_{\displaystyle \parallel} \leqslant S_n \leqslant 1$$

$$\frac{n}{\sqrt{n^2(1+1/n)}} = \frac{\cancel{n}}{\cancel{n}\sqrt{1+1/n}} = \frac{1}{\sqrt{1+1/n}} \xrightarrow{n\to\infty} 1.$$

Ainsi, $S_n \longrightarrow 1$.

➤ <u>Ex 12</u> : Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monotones à valeurs dans $[0,1]$ et tq

$u_n + v_n \longrightarrow 2$.

MQ $u_n \longrightarrow 1$ et $v_n \longrightarrow 1$.

↳ <u>Par l'absurde</u>: Supposons que u_n (ou v_n) ne cv pas vers 1. Alors

$$\exists \varepsilon>0 \;/\; \forall N\in\mathbb{N},\ \exists n>N \;/\; u_n \leqslant 1-\varepsilon.$$

Dans ce cas

$$\exists \varepsilon>0 \;/\; \forall N\in\mathbb{N},\ \exists n>N \;/\; u_n+v_n \leqslant 1-\varepsilon+1 = 2-\varepsilon,$$

ce qui traduit le fait que $\underbrace{(u_n+v_n) \text{ ne } \underline{\text{cv pas}} \text{ vers } 2\,!}_{\text{absurde !}}$

Ex 13 :

a) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tq $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ et $0 \leqslant q < 1$ tq $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant q u_n$ $\forall n \geqslant n_0$.

i) MQ $\forall n \geqslant n_0$, $0 \leqslant u_n \leqslant q^{n-n_0} u_{n_0}$.

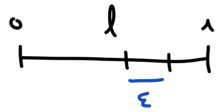
↳ Écrire une récurrence en partant de n_0...

ii) On a, pour tout $n \geqslant n_0$, $0 \leqslant u_n \leqslant \left(\underbrace{q^n}_{\downarrow\, 0} \dfrac{u_{n_0}}{q^{n_0}}\right) \xrightarrow{n\to\infty} 0$.

b) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_+^* \;/\; \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \longrightarrow l \in [0,1)$.

(MQ $u_n \longrightarrow 0$.)

Pour $\varepsilon = \dfrac{1-l}{2}$, $l + \varepsilon < 1$



Par déf. de $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \longrightarrow l$, on a, APCR,

$$0 < \frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant l + \varepsilon \iff 0 < u_{n+1} \leqslant \underbrace{(l+\varepsilon)}_{=:q\ \in [0,1)} u_n$$

Par la question a) il vient alors que $u_n \to 0$.

c) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_+^*$ tq $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = l \in (1;+\infty)$.

(MQ $\lim u_n = +\infty$)

Pour $n \in \mathbb{N}$, $v_n := \dfrac{1}{u_n}$.

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{1/u_{n+1}}{1/u_n} = \frac{u_n}{u_{n+1}} \xrightarrow{n+\infty} \frac{1}{l} \in (0,1).$$

↳ Ainsi (q. b), $v_n \longrightarrow 0^+$. Donc $u_n \longrightarrow +\infty$.

Ex 14 :

$$a_n := n^2 3^n - n^3 2^n = 3^n\Big(n^2 - n^3\underbrace{\left(\tfrac{2}{3}\right)^n}\Big)$$

Pour $x>0$, $f(x) := x^3 \times \left(\frac{2}{3}\right)^x = x^3 \times \exp\left(x \ln\left(\frac{2}{3}\right)\right)$

$$f'(x) = 3x^2\left(\tfrac{2}{3}\right)^x + x^3 \times \ln\left(\tfrac{2}{3}\right)\exp\left(x\ln\left(\tfrac{2}{3}\right)\right)$$

$$= 3x^2\left(\tfrac{2}{3}\right)^x + \ln\left(\tfrac{2}{3}\right)x^3\left(\tfrac{2}{3}\right)^x$$

$$= \underbrace{x^2\left(\tfrac{2}{3}\right)^x}_{>0}\underbrace{\left(3 - \ln\left(\tfrac{3}{2}\right)x\right)}_{<0 \text{ pour } x > \frac{3}{\ln(3/2)} \ldots}$$

Ainsi, pour $x > \frac{3}{\ln(3/2)}$, $f \searrow$. Donc $f(x) < \max\limits_{x \in \left[0, \frac{3}{\ln(3/2)}\right]} f(x) =: M$

Donc APCR, $n^3\left(\frac{2}{3}\right)^n \leqslant M$ ie $-n^3\left(\frac{2}{3}\right)^n \geqslant -M$, d'où

$$a_n \geqslant 3^n\left(n^2 - M\right) \xrightarrow{n\to\infty} +\infty.$$

$$b_n = \frac{n^2 2^{-n} - n}{n + 3^{-n}} = \frac{n^2 2^{-n}}{n+3^{-n}} - \frac{n}{n+3^{-n}} = \underbrace{\frac{n^2}{2^n(n+3^{-n})}}_{\text{MQ ça tend vers } 0\ldots} - \underbrace{\frac{1}{1+\frac{1}{n3^n}}}_{\to -1.}$$

$$0 < \frac{n^2}{2^n(n+3^{-n})}$$

$n + 3^{-n} > 1$ donc $\frac{1}{n+3^{-n}} < 1$ donc

$$0 < \frac{n^2}{2^n(n+3^{-n})} < \frac{n^2}{2^n} = \frac{n^2}{2^{\frac{n+n}{2}}} = \frac{n^2}{2^{\frac{n}{2}} \times 2^{n/2}} = \frac{n^2}{\sqrt{2}^n} \times \frac{1}{\sqrt{2}^n}$$

On pose $f(x) := \frac{x^2}{\sqrt{2}^x} = \frac{x^2}{\exp(x\ln(\sqrt{2}))} \geq 0$

$$f'(x) = \frac{2x\sqrt{2}^x - \ln(\sqrt{2})\, x^2 \sqrt{2}^x}{\exp(x\ln(\sqrt{2}))^2}$$

$$= \underbrace{\frac{x\sqrt{2}^x}{\exp(-)^2}}_{\geq 0} \underbrace{\left(2 - x\ln(2)\right)}_{<0 \text{ pour } x > \frac{2}{\ln(2)}}$$

Donc $f \searrow$ sur $\left(\frac{2}{\ln(2)}; +\infty\right)$; or $f \geq 0$ et continue sur $[-,\infty)$,

Donc $0 \leq f(x) \leq \sup_{\left(\frac{2}{\ln(2)}; +\infty\right)} f(x) =: M.$

On a donc $0 < \frac{n^2}{2^n(n+3^{-n})} < \frac{n^2}{\sqrt{2}^n} \times \frac{1}{\sqrt{2}^n} < M \times \frac{1}{\sqrt{2}^n} \to 0$

(car $\sqrt{2} > 1$)

$$c_n = \frac{(-10)^n + n!}{2^n + n^2}$$

$$(-10)^n = \begin{cases} 10^n & \text{si } n \text{ pair} \\ -10^n & \text{si } n \text{ impair} \end{cases} \geq -10^n.$$

Donc $c_n \geq \frac{n! - 10^n}{2^n + n^2}$

CLAIM $2^n + n^2 \leq 10^n$ APCR

↳ En effet, $\frac{2^n + n^2}{10^n} = \underbrace{\left(\frac{2}{10}\right)^n}_{\to 0} + \underbrace{\frac{n^2}{10^n}}_{\to 0}$ car $\frac{n^2}{10^n} = \overbrace{\frac{n^2}{\sqrt{10}^n}}^{\text{BORNÉ}} \times \overbrace{\frac{1}{\sqrt{10}^n}}^{\text{DISPARAIT}}$

(étude de $x \mapsto \frac{x^2}{\sqrt{10}^x}$ ...)

Ainsi, $\frac{2^n+n^2}{10^n} \longrightarrow 0$ donc $\frac{2^n+n^2}{10^n} < 1$ APCR.

donc $2^n+n^2 < 10^n$ APCR.

On a donc $\frac{1}{2^n+n^2} > \frac{1}{10^n}$ ... (à garder pour la suite!)

On a $$\frac{10^n}{n!} = \underbrace{\left(\frac{10}{1}\times\frac{10}{2}\times\cdots\times\frac{10}{10}\right)}_{=:k>0} \times \underbrace{\left(\frac{10}{11}\times\frac{10}{12}\times\cdots\cdots\times\frac{10}{n}\right)}_{<\left(\frac{10}{11}\right)^{n-10}}$$

$$\leq k\left(\frac{10}{11}\right)^{n-10}$$

Donc $$n! \geq 10^n \times \frac{1}{k}\times\left(\frac{11}{10}\right)^{n-10} = 10^n \times\left(\frac{1}{k}\times\left(\frac{11}{10}\right)^{n-10} - 1 + 1\right)$$

$$n! - 10^n \geq 10^n\left(\frac{1}{k}\times\left(\frac{11}{10}\right)^{n-10} - 1\right)$$

$$= L\times 11^n - 10^n$$

$$= L\times 11^n - \underbrace{\left(\frac{10}{11}\right)^n}_{\to 0 \text{ donc } < \frac{L}{2} \text{ APCR}} \times 11^n$$

$$\geq \frac{L}{2}11^n > 0$$

Ainsi, $$c_n \geq \frac{n!-10^n}{2^n+n^2} \geq \frac{\frac{L}{2}11^n}{2^n+n^2} \geq \frac{L}{2}\left(\frac{11}{10}\right)^n \longrightarrow +\infty.$$

$$d_n = \frac{\sqrt{4^n - 3^n} - 2^n}{n^5}$$

$$\tilde{d}_n := \frac{2^n - \sqrt{4^n - 3^n}}{n^5} = -d_n$$

$$= \frac{\left(2^n - \sqrt{4^n - 3^n}\right)\left(2^n + \sqrt{4^n - 3^n}\right)}{\left(2^n + \sqrt{4^n - 3^n}\right)} = \frac{4^n - 4^n + 3^n}{2^n + \sqrt{4^n - 3^n}}$$

$$= \frac{3^n}{2^n + \sqrt{4^n - 3^n}}$$

Or $\sqrt{4^n - 3^n} = \sqrt{4^n\left(1 - \left(\frac{3}{4}\right)^n\right)} = 2^n \sqrt{1 + \left(\frac{3}{4}\right)^n} \leqslant 2^n$.

Donc $2\sqrt{4^n - 3^n} \leqslant 2 \times 2^n$

Donc $\dfrac{1}{2\sqrt{4^n - 3^n}} \geqslant \dfrac{1}{2 \times 2^n}$

D'où $\underbrace{\dfrac{3^n}{2\sqrt{4^n - 3^n}}}_{= \tilde{d}_n} \geqslant \dfrac{1}{2} \times \dfrac{3^n}{2^n} \longrightarrow +\infty$

Ainsi, $\tilde{d}_n \to +\infty$, et donc $d_n \to -\infty$.

Ex 15 :

$$(u_n)_{n\in\mathbb{N}} := \begin{cases} u_0 \in (1,2), \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n(u_n-1)+1 & \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

a) MQ $1 < u_n < 2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

<u>Par récurrence :</u> Pour $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{H}(n)$: " $1 < u_n < 2$ ".

(I) Trivial

(H) Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $\mathcal{H}(n)$ vraie et montrons $\mathcal{H}(n+1)$.

On a $\quad 1 < u_n < 2$

donc $\quad 0 < u_n - 1 < 1$

donc $\quad 0 < u_n(u_n-1) < 2$

donc $\quad 0 < \frac{1}{2}u_n(u_n-1) < 1$

donc $\quad 1 < \underbrace{\frac{1}{2}u_n(u_n-1)}_{u_{n+1}} < 2$

Donc $\mathcal{H}(n+1)$ vraie.

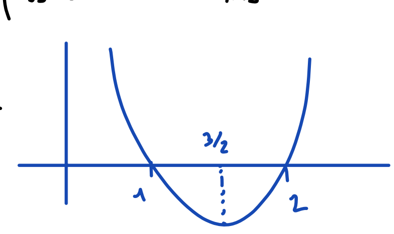
b) Pour $1<x<2$, on pose $f(x) = \frac{1}{2}x(x-1)+1-x$

$$= \frac{1}{2}(x^2-x)+1-x$$

$$= \frac{x^2}{2} - \frac{3}{2}x + 1$$

$\Delta = \frac{9}{4} - 2 = \frac{1}{4}$ donc f possède 2 racines

$x_\pm = \frac{3}{2} \pm 1/2 = 1$ ou 2.



Ainsi $f \leq 0$ sur $(1;2)$ donc

$$\frac{1}{2} x(x-1) + 1 \leq x \quad \forall x \in (1,2)$$

Or $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in (1,2)$, donc

$$\underbrace{\frac{1}{2} u_n(u_n - 1) + 1}_{= u_{n+1}} \leq u_n$$

Donc $u_{n+1} \leq u_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$,

donc $(u_n) \searrow$.

c) Ainsi, (u_n) décroissante + minorée donc convergente de limite ℓ.

On a $u_{n+1} = \frac{1}{2} u_n (u_n - 1) + 1$

Donc en passant à la limite, il vient

$$\ell = \frac{1}{2} \ell (\ell - 1) + 1.$$

↪ Ça revient à regarder les racines de f de la q. 6...

↳ Les ℓ admissibles sont 1 et 2, or $\ell \leq u_0 < 2$, donc $\ell = 1$.

Ex 16 : Si $u_0 > 2$, alors par l'étude de la fonction f de l'ex 15 pour $x > 2$ ce fois-ci, on déduit que (u_n) est croissante.

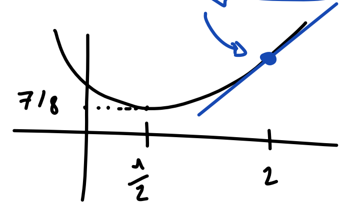
↳ En particulier, $u_n > 2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Pour $x > 2$, posons maintenant $g(x) = \frac{1}{2} x(x-1) + 1 = f(x) + x$

$$= \frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} + 1$$

g est globalement convexe puisque $g''(x) = 1 > 0$.

En particulier $g(x) \geqslant \underbrace{g'(2)(x-2) + g(2)}$



$g'(x) = x - \frac{1}{2}$ $\qquad$ $g'(2) = 2 - \frac{1}{2} = 3/2$ $\qquad$ $g(2) = 2 - 1 + 1 = 2$

Donc $g(x) \geqslant \frac{3}{2}(x-2) + 2 = \frac{3}{2} x - 1$

Ainsi, puisque $u_{n+1} = g(u_n)$, on a

$$u_{n+1} \geqslant \frac{3}{2} u_n - 1 \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

et puisque $u_n > u_0 > 2$, (*)

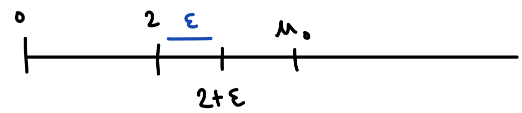
$$-2 > -u_n$$

$$-1 > -\frac{u_n}{2},$$

et donc $u_{n+1} \geqslant \frac{3}{2} u_n - 1 > u_n$ ... → Super nul ! On cherchait une croissance sur-géométrique... Le pb ici est que la raison est 1 : ça n'explose pas...

Mais bon, on peut rattraper le coup :

$u_0 > 2$ donc $\exists \varepsilon > 0 \,/\, u_0 > 2 + \varepsilon$ $\left(\text{prendre } \varepsilon = \frac{u_0 - 2}{2}\right)$



↳ On reprend ⊛ avec ça !

$u_n > u_0 > 2 + \varepsilon$

$u_n - \varepsilon > 2$

$-2 > -u_n + \varepsilon$

$-1 > -\frac{u_n}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$

d'où $\underbrace{u_{n+1} \geqslant \frac{3}{2} u_n - 1 > u_n + \frac{\varepsilon}{2}}_{(u_n) \text{ est sur-arithmétique!}}$ $\forall n \in \mathbb{N}.$ (c'est gagné)

Ainsi, $\underbrace{u_n \geqslant u_0 + \frac{n\varepsilon}{2}}_{\text{Le montrer par récurrence...}} \xrightarrow{n \to \infty} +\infty.$

➤ <u>Ex 17</u> : $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} = \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \right)_{n \in \mathbb{N}}$

$$(v_n)_{n \in \mathbb{N}} = \left(u_n + \frac{1}{n\, n!} \right)_{n \in \mathbb{N}}$$

a) MQ (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

↳ (u_n) est ↗ (clair : $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)!} > 0$)

↳ (v_n) est ↘ : $$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)(n+1)!} - \frac{1}{n\,n!}$$

$$= \frac{n+2}{(n+1)(n+1)!} - \frac{1}{n\,n!}$$

Donc $v_{n+1} - v_n \leqslant 0 \iff \frac{n+2}{(n+1)(n+1)!} \leqslant \frac{1}{n\,n!}$

$$\iff n+2 \leqslant \frac{(n+1)(n+1)!}{n\,n!} = \frac{(n+1)^2}{n}$$

$$\iff \cancel{n^2} + \cancel{2n} \leqslant \cancel{n^2} + \cancel{2n} + 1$$

$\iff 0 \leqslant 1$ qui est trivialement vrai...

Ainsi, (u_n) ↘.

↳ Enfin, $v_n - u_n = \frac{1}{n\,n!} \longrightarrow 0$.

Donc (u_n) et (v_n) sont adjacentes, en part, elles cv et ont $\underbrace{\text{la même limite}}_{=:\ell}$.

b) $$u_{10} = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \frac{1}{720} + \cdots + \frac{1}{10!}$$

$$= 2{,}7182818 + K$$

avec $|K| < 10^{-7}$

Maintenant,

$$e = u_{10} + \sum_{k=11}^{\infty} \frac{1}{k!} = 2,7182818 + k + \underbrace{\sum_{k=11}^{\infty} \frac{1}{k!}}_{\text{MQ ce truc est petit...}}$$

Pour $k \geqslant 11$,

$$\frac{1}{k!} = \frac{1}{10!} \times \frac{1}{\prod_{i=11}^{k} (i)}$$
$$\leqslant 10^{-5} \times \frac{1}{10^{k-11}} = 10^{6-k}$$

Donc

$$\sum_{k=11}^{\infty} \frac{1}{k!} \leqslant 10^{6} \times \underbrace{\sum_{k=11}^{\infty} \frac{1}{10^k}}_{\ell := k-11} = \frac{10^6}{10^{11}} \lim_{n \to \infty} \sum_{\ell=0}^{n-11} \left(\frac{1}{10}\right)^{\ell}$$

$$= 10^{-5} \lim_{n \to \infty} \frac{1 - \left(\frac{1}{10}\right)^{n-10}}{1 - 1/10}$$

$$= 10^{-5} \times \frac{1}{9/10} = \frac{10^{-4}}{9} < 10^{-4}$$

Ainsi, $e = 2,7182 + L$ avec $|L| = \left| 0,0000818 + k + \sum_{k=11}^{\infty} \frac{1}{k!} \right|$

$$\leqslant 2 \cdot 10^{-4}.$$

Donc $e \approx 2,718$ à 10^{-3} près...

Ex 18 : Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k}$

$u_n := S_{2n}$ et $v_n := S_{2n+1}$

$\hookrightarrow u_{n+1} - u_n = \frac{(-1)^{2n}}{2n} = \frac{1}{2n} > 0$ donc $u_n \nearrow$

$\hookrightarrow v_{n+1} - v_n = \frac{(-1)^{2n+1}}{2n+1} = -\frac{1}{2n+1} < 0$ donc $v_n \searrow$

$\hookrightarrow v_n - u_n = \frac{(-1)^{2n+1}}{2n+1} = -\frac{1}{2n+1} \xrightarrow{n \to \infty} 0.$

Donc (u_n) et (v_n) sont adjacentes

donc $\exists l \in \mathbb{R} / u_n \to l \leftarrow v_n$.

Ex 19 : Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}$.

a) MQ (S_n) est $\nearrow$ (TRIVIAL)

b) i) Pour $k \geq 2$, $0 < k-1 \leq k$ donc $k(k-1) \leq k^2$

donc $\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k(k-1)}$

Ensuite, $\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} = \frac{k-k+1}{k(k-1)} = \frac{1}{k(k-1)}$.

ii) $Q_n := \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)}$ pour $n \geqslant 2$.

$$= \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} - \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k}$$

$$= 1 - \frac{1}{n}$$

iii) $\forall n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leqslant 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2}$

$$\leqslant 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)}$$

$$= 1 + Q_n$$

$$= 2 - \frac{1}{n}$$

$$< 2.$$

c) On a (S_n) ↑ et majorée par 2 donc CV avec $\lim_{n \to \infty} S_n \leqslant 2$.