Fiche 1 - Sommes et Inégalités

Ex 1

a) 1) $\sum_{i=1}^{n} a_i$ 2) $\sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-i}$ 3) $\sum_{i=0}^{n} (n+i)^2$

b) $\sum_{i=1}^{n-1} 2 = 2(n-1)$ $\sum_{i=0}^{n} n = n(n+1)$ $\sum_{i=1}^{n+1} n^2 = n^2(n+1)$

$\prod_{i=1}^{n} n = n^{n+1}$ $\prod_{i=0}^{n-1} 3 = 3^n$ $\prod_{i=4}^{n} (2a) = (2a)^{n-3}$

c) $$S = \sum_{i=3}^{n-1} a_{i-2} - \sum_{i=1}^{n-2} a_{i+1}$$

$j+1 = i-2 \iff j = i-3$

$\hookrightarrow i = 3 \Rightarrow j = 0$

$\hookrightarrow i = n-1 \Rightarrow j = n-4$

$$= \sum_{j=0}^{n-4} a_{j+1} - \sum_{i=1}^{n-2} a_{i+1}$$

$$= \underbrace{a_1}_{j=0} + \cancel{\sum_{j=1}^{n-4} a_{j+1}} - \cancel{\sum_{i=1}^{n-4} a_{i+1}} - \underbrace{a_{n-2}}_{i=n-3} - \underbrace{a_{n-1}}_{i=n-2}$$

$$\boxed{S = a_1 - a_{n-2} - a_{n-1}}$$

$$T = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} a_{i-1}}_{j=i-1} + 2\sum_{i=1}^{n} a_i - 3\underbrace{\sum_{i=0}^{n-2} a_{i+1}}_{k=i+1}$$

$$= \sum_{j=0}^{n-1} a_j + 2\sum_{i=1}^{n} a_i - 3\sum_{k=1}^{n-1} a_k$$

$$= \overbrace{a_0}^{j=0} + \cancel{\sum_{j=1}^{n-1} a_j} + \cancel{2\sum_{i=1}^{n-1} a_i} + \overbrace{2a_n}^{i=n} - \cancel{3\sum_{k=1}^{n-1} a_k}$$

$$\boxed{T = a_0 + 2a_n}$$

$$U = \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1}}_{j=k+1} - \sum_{i=2}^{n-1} \frac{1}{i}$$

$$= \sum_{j=2}^{n+1} \frac{1}{k+1} - \sum_{i=2}^{n-1} \frac{1}{i}$$

$$= \cancel{\sum_{j=2}^{n-1} \frac{1}{k+1}} + \underbrace{\frac{1}{n+1}}_{j=n} + \underbrace{\frac{1}{n+2}}_{j=n+1} - \cancel{\sum_{i=2}^{n-1} \frac{1}{i}}$$

$$\boxed{U = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2}}$$

Ex 2 : a) $q \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$

MQ $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} q^k = \frac{1-q^n}{1-q}$ par récurrence.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, notons $\mathcal{H}(n) : \left[\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} q^k = \frac{1-q^n}{1-q} \right]$

Initialisation : $\left.\begin{array}{l} \displaystyle\sum_{k=0}^{0} q^k = q^0 = 1 \\ \displaystyle\frac{1-q^1}{1-q} = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \mathcal{H}(1)$ est vraie.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$, supp $\mathcal{H}(n)$ vraie.

Alors $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} q^k = \sum_{k=1}^{n-1} q^k + q^n \overset{(HR)}{=} \frac{1-q^n}{1-q} + q^n = \cdots$

$$\dots = \frac{1-\cancel{q^n}+q^n(\cancel{1}-q)}{1-q} = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}.$$

Donc $\mathcal{H}(n+1)$ vraie.

Ainsi, $\mathcal{H}(n)$ est vraie $\forall n \in \mathbb{N}^*$. $\square$

Application :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{3}{4}\right)^k = \frac{1-\frac{3^n}{4^n}}{\underbrace{1-\frac{3}{4}}_{=1/4}} = 4\left(1-\frac{3^n}{4^n}\right) = \frac{4(4^n-3^n)}{4^n} = \frac{4^n-3^n}{4^{n-1}}$$

$$T_n = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{3}{4}\right)^k = S_n - \left(\frac{3}{4}\right)^0 + \left(\frac{3}{4}\right)^n = \frac{4^n-3^n}{4^{n-1}} - 1 + \frac{3^n}{4^n}$$ à simplifier...

$$U_n = \sum_{k=0}^{n-1} 2^k = \frac{1-2^n}{1-2} = 2^n - 1$$

b) MQ $\mathcal{H}(n) : \left[\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2\right]$ vraie $\forall n \in \mathbb{N}^*$ par récurrence :

(I) $\sum_{k=1}^{1}(2k-1) = 2-1 = 1 = 1^2 \Rightarrow \mathcal{H}(0)$ vraie.

(H) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, supp. $\mathcal{H}(n)$ vraie,

$$\sum_{k=1}^{n+1}(2k-1) = \sum_{k=1}^{n}(2k-1) + 2(n+1)-1 \overset{(HR)}{=} n^2 + 2(n+1)-1 = n^2+2n+1 = (n+1)^2.$$

Donc $\mathcal{H}(n)$ vraie $\forall n \in \mathbb{N}^*$. $\square$

c) $(1-q)\times\sum_{k=0}^{n-1} q^k = (1-q)\left(q^0+q^1+q^2+q^3+\dots\dots+q^{n-2}+q^{n-1}\right)$

$$= \left(q^0+\cancel{q^1}+\cancel{q^2}+\cancel{q^3}+\cancel{\dots\dots}+\cancel{q^{n-2}}+\cancel{q^{n-1}}\right)$$
$$-\left(\cancel{q^1}+\cancel{q^2}+\cancel{q^3}+\cancel{q^4}+\dots\dots+\cancel{q^{n-2}}+\cancel{q^{n-1}}+q^n\right)$$

$$= 1-q^n \qquad \square$$

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = 2\underbrace{\sum_{k=1}^{n}(k)} - \underbrace{\sum_{k=1}^{n}(1)}_{=n} = n(n+1)-n = n^2. \qquad \square$$

n pair

$$\begin{aligned}
& 1+n\\
+\ & 2+n-1\\
+\ & 3+n-2\\
+\ & \dots\dots\dots\\
+\ & i+n+1-i\\
+\ & \dots\dots\dots\\
+\ & \frac{n}{2}+\frac{n}{2}+1\\
\hline
& \frac{n}{2}\times(n+1)
\end{aligned}$$

n impair

$$\begin{aligned}
& 1+n\\
+\ & 2+n-1\\
+\ & 3+n-2\\
+\ & \dots\dots\dots\\
+\ & i+n+1-i\\
+\ & \dots\dots\dots\\
+\ & \frac{n-1}{2}+\frac{n-1}{2}+2\\
+\ & \frac{n-1}{2}+1\\
\hline
& \frac{n-1}{2}\times(n+1)+\frac{n-1}{2}+1 = \frac{n(n+1)}{2} \cancel{-\frac{n+1}{2}} \cancel{+\frac{n-1}{2}} \cancel{+1}
\end{aligned}$$

➤ Ex 3 :

a) $p, q \in \mathbb{N}$, $p \leq q$

$$\sum_{k=p}^{q} a_{k+1}-a_k = a_{q+1} + \underbrace{\sum_{k=p}^{q-1} a_{k+1}}_{i=k+1} - \sum_{k=p+1}^{q} a_k - a_p$$

$$= a_{q+1} - a_p + \cancel{\sum_{i=p+1}^{q} a_i} - \cancel{\sum_{k=p+1}^{q} a_k}$$

b) $$S_n = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right) = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{k+1}{k}\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left(\ln(k+1) - \ln(k)\right)$$

$$= \ln(n+1) - \ln(1)$$

$$\boxed{S_n = \ln(n+1)}$$

c) $(a_k)_{k\in\mathbb{N}} = (k^2)_{k\in\mathbb{N}}$.

$$S_n := \sum_{k=1}^{n} a_{k+1} - a_k$$

↳ Par télescopage : $S_n = (n+1)^2 - 1 = n^2 + 2n = n(n+2)$

↳ Par développement direct : $$S_n = \sum_{k=1}^{n} (k+1)^2 - k^2$$

$$= \sum_{k=1}^{n} 2k+1$$

$$= 2\left[\sum_{k=1}^{n} k\right] + \underbrace{\sum_{k=1}^{n} 1}_{=n}$$

↳ Par correspondance des deux expressions, il vient :

$$n(n+2) = 2\sum_{k=1}^{n} k + n \iff \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+2)-n}{2} = \frac{n(n+1)}{2}.$$

d) $(a_k)_{k\in\mathbb{N}} = (k^3)_{k\in\mathbb{N}}$.

$$S_n := \sum_{k=1}^{n} a_{k+1} - a_k = (n+1)^3 - 1 = n^3 + 3n^2 + 3n$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (k+1)^3 - k^3 = \sum_{k=1}^{n} 3k^2 + 3k + 1$$

Par correspondance :

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n^3 + 3n^2 + 3n - 3\frac{n(n+1)}{2} - n}{3} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Ex 4 :

$$A = \sum_{k=0}^{7} \binom{7}{k} 2^k 3^{7-k} = (2+3)^7 = 5^7$$

$$B = \sum_{k=2}^{10} \binom{10}{k} = \sum_{k=0}^{10} \binom{10}{k} - \binom{10}{0} - \binom{10}{1}$$

$$= 2^{10} - 1 - 10$$

$$= 1024 - 1 - 10$$

$$\boxed{B = 1013}$$

$$C = \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k \binom{2n}{k} 2^k 3^{2n-k} \overset{N=2n}{=} \sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} (-2)^k \left(3^{N-k}\right)$$

$$= 1.$$

Ex 5 : MQ $P_n := \prod_{k=1}^{n} 6k-3 = \left(\frac{3}{2}\right)^n \frac{(2n)!}{n!}$

$$(2n)! = \underbrace{\prod_{k=0}^{n-1} (2k+1)}_{j=k+1} \times \prod_{k=1}^{n} (2k)$$

$$= \prod_{j=1}^{n} (2j-1) \times \prod_{k=1}^{n} (2k)$$

$$= \prod_{j=1}^{n} (2j-1) \times 2^n \prod_{k=1}^{n} k$$

$$= \prod_{j=1}^{n} (2j-1) \times 2^n \, n!$$

Ainsi, $\left(\frac{3}{2}\right)^n \frac{(2n)!}{n!} = \cancel{2}^n \left(\frac{3}{\cancel{2}}\right)^n \prod_{j=1}^{n} (2j-1)$

$$= 3^n \prod_{j=1}^{n} (2j-1)$$

$$= \prod_{j=1}^{n} 3(2j-1)$$

$$= \prod_{j=1}^{n} (6j-3)$$

Ex 6 :

$$0 < 3 < 4$$

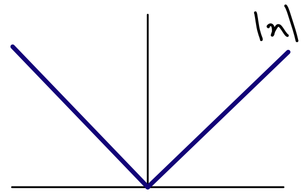
$$0 < \sqrt{3} < 2$$

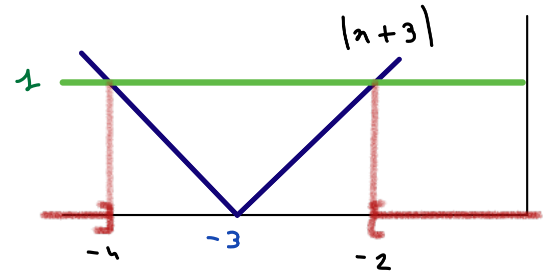
$$-2 < -\sqrt{3} < 0$$

$$3 < 5-\sqrt{3} < 5 < 11$$

Ex 7 :

1) $|x+3| \geqslant 1$





↳ Si $x \geqslant -3$, $|x+3| \geqslant 1 \iff x+3 \geqslant 1 \iff x \geqslant -2$

↳ Si $x \leqslant -3$, $|x+3| \geqslant 1 \iff -(x+3) \geqslant 1 \iff -x-3 \geqslant 1$

$$\iff x \leqslant -4$$

Ainsi, $|x+3| \geqslant 1$ ssi $x \in (-\infty ; -4] \cup [-2 ; +\infty)$

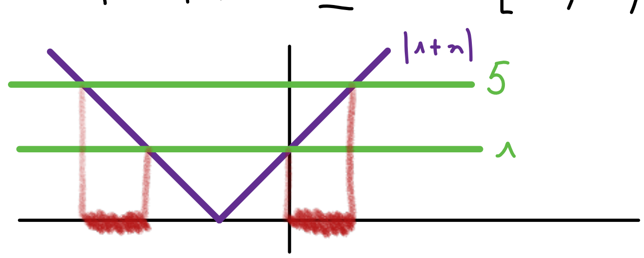
2) $1 < |1+x| \leqslant 5$

↳ Si $x \geqslant -1$, $1 < |1+x| \leqslant 5 \iff 1 < 1+x \leqslant 5 \iff 0 < x \leqslant 4$

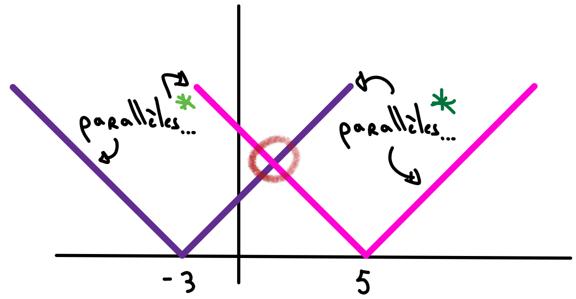
↳ Si $x \leqslant -1$, $1 < |1+x| \leqslant 5 \iff 1 < -(1+x) \leqslant 5 \iff 2 < -x \leqslant 6$

$$\iff -6 \leqslant x < -2$$

Ainsi, $1 < |1+x| \leqslant 5$ ssi $x \in [-6 ; -2) \cup (0 ; 4]$



3) $E : |x+3| = |x-5|$



↳ Si $x \leqslant -3$

$(E) \Leftrightarrow -x-3 = -x+5 \Leftrightarrow -3 = 5 \longrightarrow$ Pas de solu° *

↳ Si $-3 \leqslant x \leqslant 5$

$(E) \Leftrightarrow x+3 = -x+5 \Leftrightarrow 2x = 2 \Leftrightarrow x = 1$

↳ Si $x \geqslant 5$

$(E) \Leftrightarrow x+3 = x+5 \Leftrightarrow 3 = 5 \longrightarrow$ Pas de solution. *

Ainsi, $\boxed{(E) \Leftrightarrow x = 1.}$

➤ Ex 8 : Soit $x \in [-3;-2]$

↳ $-3 \leqslant x \leqslant -2$
$-6 \leqslant 2x \leqslant -4$
$-1 \leqslant 2x+5 \leqslant 1$

↳ $-3 \leqslant x \leqslant -2$
$2 \leqslant -x \leqslant 3$
$3 \leqslant 1-x \leqslant 4$

↳ $-3 \leqslant x \leqslant -2$
$1 \leqslant x+4 \leqslant 2$
$\frac{1}{2} \leqslant \frac{1}{x+4} \leqslant 1.$

↳ $-3 \leqslant x \leqslant -2$

$-2 \leqslant x+1 \leqslant -1$

$1 \leqslant (x+1)^2 \leqslant 4$

$x \mapsto x^2$ décroissante sur $\mathbb{R}_-$

↳ $-3 \leqslant x \leqslant -2$

$-9 \leqslant 3x \leqslant -6$

$\underbrace{-2 \leqslant 3x+7 \leqslant 1}$

⚠ $x \mapsto x^2$ non monotone sur $[-2;1]$...

$$-2 \leqslant 3x+7 \leqslant 0 \quad \text{ou} \quad 0 \leqslant 3x+7 \leqslant 1$$

$$\underbrace{0 \leqslant (3x+7)^2 \leqslant 4}_{} \quad \text{ou} \quad \underbrace{0 \leqslant (3x+7)^2 \leqslant 1}_{}$$

$$0 \leqslant 3x+7 \leqslant 4$$

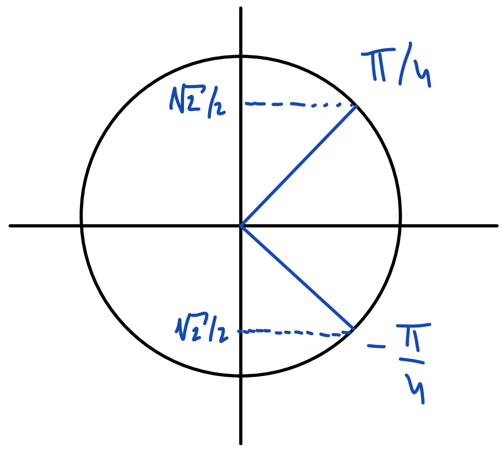
$$-3 \leqslant x \leqslant -2$$

$$-6 \leqslant 2x \leqslant -4$$

$$-1 \leqslant 2x+5 \leqslant 1$$

$$-\frac{\pi}{4} \leqslant \frac{\pi}{4}(2x+5) \leqslant \frac{\pi}{4}$$

$$-\frac{\sqrt{2}}{2} \leqslant \sin\left(\frac{\pi}{4}(2x+5)\right) \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2}.$$



Ex 9 :

a) Soient $x, y \in \mathbb{R}$,

$$0 \leqslant (x-y)^2 \iff 0 \leqslant x^2+y^2-2xy \iff 2xy \leqslant x^2+y^2.$$

b) Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\quad x + \frac{1}{x} - 2 = \frac{x^2-2x+1}{x} = \frac{(x-1)^2}{x} \geqslant 0$

d'où $\quad x + \frac{1}{x} \geqslant 2.$

c) Soit $x \in \mathbb{R}$, $\quad \frac{1}{4} - x(1-x) = x^2 - x + 1/4 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \geqslant 0$

d'où $\quad x(1-x) \leqslant \frac{1}{4}.$

d) Soient $a \in [-1; +\infty)$ et $n \in \mathbb{N}$, $\quad (1+a)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k = 1 + na + \underbrace{\sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} a^k}_{}$

ce truc pourrait être négatif....

Deuxième approche : $f : \begin{cases} [-1\,;+\infty) \longrightarrow \mathbb{R} \\ a \longmapsto (1+a)^n \end{cases}$

La fonction f est deux fois dérivable et f'' est continue :

$f'(a) = n(1+a)^{n-1}$

$f''(a) = n(n-1)(1+a)^{n-2}$.

Or $a \geq -1$ donc $1+a \geq 0$ donc $f''(a) \geq 0$ $\forall a \in [-1\,;\infty)$.

Donc f est globalement convexe. Donc f est AU DESSUS de toutes ses tangentes.

En particulier,

$$f(a) \geq f'(0)(a-0) + f(0) = 1 + na,$$

c-à-d : $(1+a)^n \geq 1 + na$. $\square$

Ex 10 : Soient $(x,y) \in (-1,1)^2$

a) MQ $1+xy > 0$.

↳ Si x et y ont le même signe c'est trivialement vrai.

↳ Maintenant, si $x>0$ et $y<0$ (faire de même pour $x<0$ et $y>0$)

$$-1 < y < 0 \implies -1 \leq xy < 0 \implies 0 \leq 1+xy \leq 1$$

multiplication par $x \geq 0$...

b) $-1 < x < 1$

$-1 < \pm x < 1$

$0 < 1 \pm x < 2$ de même, $0 < 1 \pm y < 2.$

Ainsi, $0 < (1 \pm x)(1 \pm y) < 4.$

c) On a $0 < (1-x)(1-y)$

$0 < 1 + xy - x - y$

$x + y < \underbrace{1 + xy}_{>0}$

$\frac{x+y}{1+xy} < 1.$

De même, $0 < (1+x)(1+y)$

$0 < 1 + xy + x + y$

$-(x+y) < \underbrace{1 + xy}_{>0}$

$-\frac{x+y}{1+xy} < 1$

$\frac{x+y}{1+xy} > -1.$

Ainsi, $\forall (x,y) \in (-1;1)^2,\ \frac{x+y}{1+xy} \in (-1;1).$ $\square$

Ex 11 :

a) MQ $\sin(x) \leqslant x, \quad \forall x > 0.$

↳ Pour $x \geqslant 1$, c'est évident car $\sin(x) \leqslant 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

↳ Pour $x \in (0,1)$, $f : \begin{cases} (0,1) \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \sin \end{cases}$ est deux fois dérivable

et de dérivée seconde continue.

On a ainsi, $f'(x) = \cos(x)$ et $f''(x) = -\sin(x) < 0$ pour $x \in [0,1]$.

Ainsi, f est concave sur $[0,1]$, en particulier, elle est en dessus de sa tangente en $x = 0$, ce qui s'écrit

$$f(x) = \sin(x) \leqslant x, \quad \forall x \in [0,1].$$

Ainsi, on trouve bien $\sin(x) \geqslant x, \quad \forall x \in \mathbb{R}_+$.

b) Utiliser le même argument de concavité que pour a)
(Prendre la tangente en $x=0$)

c) Idem. (⚠ ici c'est convexe) (Prendre la tangente en $x=0$)

Ex 12 :

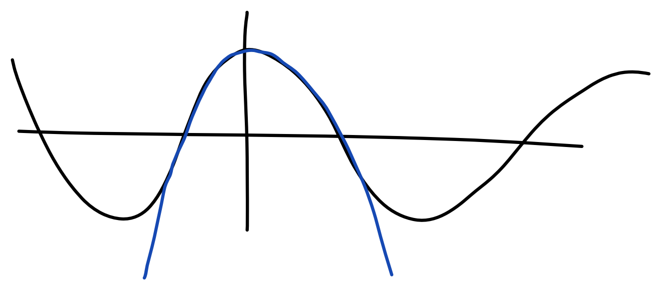
a) Soient $x, y \in \mathbb{R}_+^*$,

↳ $(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 \geqslant 0 \iff x + y - 2\sqrt{xy} \geqslant 0 \iff \underbrace{\frac{x+y}{2} \geqslant \sqrt{xy}}$. ok

$$\frac{2}{x+y} \leqslant \frac{1}{\sqrt{xy}} \iff \underbrace{\frac{2xy}{x+y} \leqslant \sqrt{xy}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{\frac{x+y}{xy}} \leqslant \sqrt{xy} \Leftrightarrow \frac{2}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}} \leqslant \sqrt{xy}.$$ ok

b) MQ $\forall x \in \mathbb{R},\ 1-\frac{x^2}{2} \overset{(*)}{\leqslant} \cos(x) \overset{\text{ok...}}{\leqslant} 1.$



$$1-\frac{x^2}{2} < -1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{2} > 2 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}\setminus[-1;1].$$

Donc dans $\mathbb{R}\setminus[-1;1]$, $(*)$ est trivialement vérifié.

↳ Pour $x \in [0;1]$, par Taylor-Lagrange, $\exists c = c_x \in [0;1]$ /

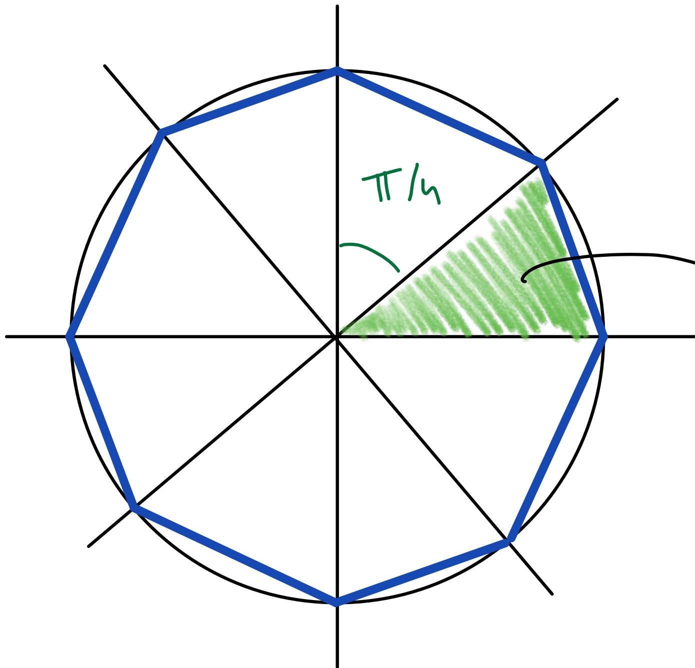
$$\cos(x) = 1-\frac{x^2}{2}+\frac{\cos^{(3)}(c)}{6}x^3 = 1+\frac{x^2}{2}+\underbrace{\frac{\sin(c)}{6}x^3}_{\geqslant 0} \geqslant 1+\frac{x^2}{2}.$$

↳ Pour $x \in [-1;0]$, par Taylor-Lagrange, $\exists c = c_x \in [-1;0]$ /

$$\cos(x) = 1-\frac{x^2}{2}+\frac{\cos^{(3)}(c)}{6}x^3 = 1+\frac{x^2}{2}+\underbrace{\frac{\sin(c)}{6}x^3}_{\geqslant 0} \geqslant 1+\frac{x^2}{2}. \quad \square$$

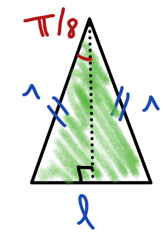
↳ Faire de même pour MQ $x-\frac{x^3}{6} \leqslant \sin(x)\ \forall x \in \mathbb{R}_+.$

c)



ℓ = longueur d'un des côtés de l'octogone.

est isocèle :



$$\sin\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\ell}{2}$$

d'où $\boxed{\ell = 2\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)}$

↳ On a une formule pour le sinus de demi-angles : $2\sin^2\left(\frac{A}{2}\right) = 1 - \cos(A)$

Ainsi, $\ell = 2\sqrt{\frac{1}{2}\left(1-\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)} = \sqrt{2}\sqrt{1-\sqrt{2}/2} = \sqrt{\cancel{2}}\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{\cancel{2}}}$

$= \sqrt{2-\sqrt{2}}$.

Maintenant, chaque $8^{\text{ième}}$ d'arc de cercle mesure $\frac{\pi}{4}$; on a donc, par inégalité triangulaire,

$$\ell = \sqrt{2-\sqrt{2}} \leqslant \frac{\pi}{4}, \quad \text{c'est-à-dire} \quad 4\sqrt{2-\sqrt{2}} \leqslant \pi.$$